1 Fórmules trigonomètriques

Pàgina 131

1 Demostra la fórmula (II.2) a partir de la fórmula:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha(-\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

2 Demostra (II.3) a partir de $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\,tg\,\beta}$**.**

$$tg(\alpha-\beta)=tg(\alpha+(-\beta))=\frac{tg\,\alpha+tg(-\beta)}{1-tg\,\alpha\,tg(-\beta)}\overset{(*)}{=}\frac{tg\,\alpha+(-tg\,\beta)}{1-tg\,\alpha(-tg\,\beta)}=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

(*) Com que $\left.\begin{matrix}\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha\end{matrix}\right\}\to tg(-\alpha)=-tg\,\alpha$

3 Demostra la fórmula (II.3) a partir de les següents:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}\overset{(*)}{=}\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{tg\,\alpha-tg\,\beta}{1+tg\,\alpha\,tg\,\beta}$$

(*) Dividim numerador i denominador per $\cos\alpha\cos\beta$.

4 Si $\sin 12°=0{,}2$ i $\sin 37°=0{,}6$, troba $\cos 12°$, $tg\,12°$, $\cos 37°$ i $tg\,37°$. Calcula, a partir d'aquestes, les raons trigonomètriques de 49° i de 25°, utilitzant les fórmules (I) i (II).

- $\sin 12°=0{,}2$

  $\cos 12°=\sqrt{1-\sin^2 12°}=\sqrt{1-0{,}04}=0{,}98$

  $tg\,12°=\dfrac{0{,}2}{0{,}98}=0{,}2$

- $\sin 37°=0{,}6$

  $\cos 37°=\sqrt{1-\sin^2 37°}=\sqrt{1-0{,}36}=0{,}8$

  $tg\,37°=\dfrac{0{,}6}{0{,}8}=0{,}75$

- $49°=12°+37°$, aleshores:

  $\sin 49°=\sin(12°+37°)=\sin 12°\cos 37°+\cos 12°\sin 37°=0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}98\cdot 0{,}6=0{,}748$

  $\cos 49°=\cos(12°+37°)=\cos 12°\cos 37°-\sin 12°\sin 37°=0{,}98\cdot 0{,}8-0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}664$

  $tg\,49°=tg(12°+37°)=\dfrac{tg\,12°+tg\,37°}{1-tg\,12°\,tg\,37°}=\dfrac{0{,}2+0{,}75}{1-0{,}2\cdot 0{,}75}=1{,}12$

  $\left(\text{Podria calcular-se } tg\,49°=\dfrac{\sin 49°}{\cos 49°}\right)$.

- 25° = 37° – 12°, aleshores:

$sin\ 25° = sin\ (37° - 12°) = sin\ 37°\ cos\ 12° - cos\ 37°\ sin\ 12° = 0{,}6 \cdot 0{,}98 - 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}428$

$cos\ 25° = cos\ (37° - 12°) = cos\ 37°\ cos\ 12° + sin\ 37°\ sin\ 12° = 0{,}8 \cdot 0{,}98 + 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}904$

$$tg\ 25° = tg\ (37° - 12°) = \frac{tg\ 37° - tg\ 12°}{1 + tg\ 37°\ tg\ 12°} = \frac{0{,}75 - 0{,}2}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}2} = 0{,}478$$

5 **Demostra aquesta igualtat:**

$$\frac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sin\ (a+b) + sin\ (a-b)} = \frac{1}{tg\ a}$$

$$\frac{cos\ (a+b) + cos\ (a-b)}{sin\ (a+b) + sin\ (a-b)} = \frac{cos\ a\ cos\ b - sin\ a\ sin\ b + cos\ a\ cos\ b + sin\ a\ sin\ b}{sin\ a\ cos\ b + cos\ a\ sin\ b + sin\ a\ cos\ b - cos\ a\ sin\ b} =$$

$$= \frac{2\ cos\ a\ cos\ b}{2\ sin\ a\ cos\ b} = \frac{cos\ a}{sin\ a} = \frac{1}{tg\ a}$$

6 **Demostra les fórmules (III.1) i (III.3) fent $\alpha = \beta$ en les fórmules (I).**

$sin\ 2\alpha = sin\ (\alpha + \alpha) = sin\ \alpha\ cos\ \alpha + cos\ \alpha\ sin\ \alpha = 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha$

$$tg\ 2\alpha = tg\ (\alpha + \alpha) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \alpha}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \alpha} = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}$$

7 **Troba les raons trigonomètriques de 60° usant les de 30°.**

$$sin\ 60° = sin\ (2 \cdot 30°) = 2\ sin\ 30°\ cos\ 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 60° = cos\ (2 \cdot 30°) = cos^2\ 30° - sin^2\ 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = tg\ (2 \cdot 30°) = \frac{2\ tg\ 30°}{1 - tg^2\ 30°} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - (\sqrt{3}/3)^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/3}{2/3} = \sqrt{3}$$

8 **Troba les raons trigonomètriques de 90° usant les de 45°.**

$$sin\ 90° = sin\ (2 \cdot 45°) = 2\ sin\ 45°\ cos\ 45° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$cos\ 90° = cos\ (2 \cdot 45°) = cos^2\ 45° - sin^2\ 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$tg\ 90° = tg\ (2 \cdot 45°) = \frac{2\ tg\ 45°}{1 - tg^2\ 45°} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \rightarrow \text{No existeix.}$$

9 **Demostra que:** $\dfrac{2\ sin\ \alpha - sin\ 2\alpha}{2\ sin\ \alpha + sin\ 2\alpha} = \dfrac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$

$$\frac{2\ sin\ \alpha - sin\ 2\alpha}{2\ sin\ \alpha + sin\ 2\alpha} = \frac{2\ sin\ \alpha - 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha}{2\ sin\ \alpha + 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha} = \frac{2\ sin\ \alpha\ (1 - cos\ \alpha)}{2\ sin\ \alpha\ (1 + cos\ \alpha)} = \frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}$$

Pàgina 132

Fes-ho tu. Troba $cos\ 15°$ i $tg\ 15°$.

$$cos\ 15° = cos\ \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$tg\ 15° = \sqrt{\frac{1 - cos\ 30°}{1 + cos\ 30°}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{1 + \sqrt{3}/2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

10 **Seguint les indicacions que es donen, demostra detalladament les fórmules IV.1, IV.2 i IV.3.**

- $cos\ \alpha = cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = cos^2 \frac{\alpha}{2} - sin^2 \frac{\alpha}{2}$

  Per la igualtat fonamental:

  $cos^2 \frac{\alpha}{2} + sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow 1 = cos^2 \frac{\alpha}{2} + sin^2 \frac{\alpha}{2}$

  D'aquí:

  a) Sumant ambdues igualtats:

  $1 + cos\ \alpha = 2\ cos^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + cos\ \alpha}{2} \rightarrow cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}$

  b) Restant les igualtats (2a – 1a):

  $1 - cos\ \alpha = 2\ sin^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\ \alpha}{2} \rightarrow sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}$

- Per últim:

  $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{sin\ (\alpha/2)}{cos\ (\alpha/2)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}}$

11 **Sabent que $cos\ 78° = 0{,}2$, calcula $sin\ 78°$ i $tg\ 78°$. Esbrina les raons trigonomètriques de 39° aplicant-hi les fórmules de l'angle meitat.**

- $cos\ 78° = 0{,}2$

  $sin\ 78° = \sqrt{1 - cos^2 78°} = \sqrt{1 - 0{,}2^2} = 0{,}98$

  $tg\ 78° = \frac{0{,}98}{0{,}2} = 4{,}9$

- $sin\ 39° = sen \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}2}{2}} = 0{,}63$

  $cos\ 39° = cos \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ 78°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}2}{2}} = 0{,}77$

  $tg\ 39° = tg \frac{78°}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ 78°}{1 + cos\ 78°}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}2}{1 + 0{,}2}} = 0{,}82$

12 **Troba les raons trigonomètriques de 30° a partir de $cos\ 60° = 0{,}5$.**

- $cos\ 60° = 0{,}5$
- $sin\ 30° = sin \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}5}{2}} = 0{,}5$

  $cos\ 30° = cos \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}5}{2}} = 0{,}866$

  $tg\ 30° = tg \frac{60°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}5}{1 + 0{,}5}} = 0{,}577$

13 **Troba les raons trigonomètriques de 45° a partir de $cos\ 90° = 0$.**

- $cos\ 90° = 0$
- $sin\ 45° = sin \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $cos\ 45° = cos \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 + 0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

  $tg\ 45° = tg \frac{90°}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} = \sqrt{1} = 1$

14 **Demostra aquesta igualtat:** $2\, tg\, \alpha \cdot sin^2 \frac{\alpha}{2} + sin\, \alpha = tg\, \alpha$

$$2\, tg\, \alpha \cdot sin^2 \frac{\alpha}{2} + sin\, \alpha = 2\, tg\, \alpha \cdot \frac{1 - cos\, \alpha}{2} + sin\, \alpha = \frac{sin\, \alpha}{cos\, \alpha}(1 - cos\, \alpha) + sin\, \alpha = sin\, \alpha \left(\frac{1 - cos\, \alpha}{cos\, \alpha} + 1 \right) =$$

$$= sin\, \alpha \left(\frac{1 - cos\, \alpha + cos\, \alpha}{cos\, \alpha} \right) = sin\, \alpha \cdot \frac{1}{cos\, \alpha} = \frac{sin\, \alpha}{cos\, \alpha} = tg\, \alpha$$

15 **Demostra la igualtat següent:**

$$\frac{2\, sin\, \alpha - sin\, 2\alpha}{2\, sin\, \alpha + sin\, 2\alpha} = tg^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{2\, sin\, \alpha - sin\, 2\alpha}{2\, sin\, \alpha + sin\, 2\alpha} = \frac{2\, sin\, \alpha - 2\, sin\, \alpha\, cos\, \alpha}{2\, sin\, \alpha + 2\, sin\, \alpha\, cos\, \alpha} = \frac{2\, sin\, \alpha\, (1 - cos\, \alpha)}{2\, sin\, \alpha\, (1 + cos\, \alpha)} = \frac{1 - cos\, \alpha}{1 + cos\, \alpha} = tg^2 \frac{\alpha}{2}$$

Pàgina 133

16 **Per demostrar les fórmules (V.3) i (V.4), fes els passos següents:**

- **Expressa en funció de α i β:**

  $cos\, (\alpha + \beta) = \dots \qquad cos\, (\alpha - \beta) = \dots$

- **Suma i resta com hem fet més amunt i obtindràs dues expressions.**
- **Substitueix en les expressions anteriors:**

  $$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{aligned}\right\}$$

- $$\begin{aligned} & cos\, (\alpha + \beta) = cos\, \alpha\, cos\, \beta - sin\, \alpha\, sin\, \beta \\ & cos\, (\alpha - \beta) = cos\, \alpha\, cos\, \beta + sin\, \alpha\, sin\, \beta \end{aligned}$$

  Sumant $\rightarrow$ $cos\, (\alpha + \beta) + cos\, (\alpha - \beta) = 2\, cos\, \alpha\, cos\, \beta$ (1)

  Restant $\rightarrow$ $cos\, (\alpha + \beta) - cos\, (\alpha - \beta) = -2\, sin\, \alpha\, sin\, \beta$ (2)

- Anomenant $\left.\begin{aligned} \alpha + \beta = A \\ \alpha - \beta = B \end{aligned}\right\} \rightarrow \alpha = \frac{A + B}{2},\ \beta = \frac{A - B}{2}$ (en resoldre el sistema)
- Aleshores, substituint en (1) i (2), s'obté:

  (1) $\rightarrow$ $cos\, A + cos\, B = 2\, cos\, \frac{A + B}{2}\, cos\, \frac{A - B}{2}$ (2) $\rightarrow$ $cos\, A - cos\, B = -2\, sin\, \frac{A + B}{2}\, sin\, \frac{A - B}{2}$

17 **Transforma en producte i calcula.**

a) $sin\, 75° - sin\, 15°$ **b)** $sin\, 75° + sin\, 15°$ **c)** $cos\, 75° - cos\, 15°$

a) $sin\, 75° - sin\, 15° = 2\, cos\, \frac{75° + 15°}{2}\, sin\, \frac{75° - 15°}{2} = 2\, cos\, 45°\, sin\, 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $sin\, 75° + sin\, 15° = 2\, sin\, \frac{75° + 15°}{2}\, cos\, \frac{75° - 15°}{2} = 2\, sin\, 45°\, cos\, 30° = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $cos\, 75° - cos\, 15° = -2\, sin\, \frac{75° + 15°}{2}\, sin\, \frac{75° - 15°}{2} = -2\, sin\, 45°\, cos\, 30° = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

18 **Expressa en forma de producte el numerador i el denominador d'aquesta fracció i simplifica el resultat:**

$$\frac{sin\, 4a + sin\, 2a}{cos\, 4a + cos\, 2a}$$

$$\frac{sin\, 4a + sin\, 2a}{cos\, 4a + cos\, 2a} = \frac{2\, sin\, \frac{4a + 2a}{2}\, cos\, \frac{4a - 2a}{2}}{2\, cos\, \frac{4a + 2a}{2}\, cos\, \frac{4a - 2a}{a}} = \frac{2\, sin\, 3a}{2\, cos\, 3a} = tg\, 3a$$

2 Equacions trigonomètriques

Pàgina 134

Fes-ho tu. Resol $\boldsymbol{sin\ (\alpha + 30°) = 2\ cos\ \alpha}$.

$sin\ (\alpha + 30°) = 2\ cos\ \alpha$

$sin\ \alpha\ cos\ 30° + cos\ \alpha\ sin\ 30° = 2\ cos\ \alpha$

$\frac{1}{2}\ sin\ \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\ cos\ \alpha = 2\ cos\ \alpha$

Dividim els dos membres entre $cos\ \alpha$:

$\frac{1}{2}\ tg\ \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \rightarrow tg\ \alpha + \sqrt{3} = 4 \rightarrow tg\ \alpha = 4 - \sqrt{3}$

Solucions: $\begin{cases} \alpha_1 = 66°\ 12'\ 22'' \\ \alpha_2 = 246°\ 12'\ 22'' \end{cases}$

Fes-ho tu. Resol $\boldsymbol{cos\ \alpha = sin\ 2\alpha}$.

$cos\ \alpha = sin\ 2\alpha$

$cos\ \alpha = 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha \rightarrow cos\ \alpha - 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha = 0 \rightarrow cos\ \alpha\ (1 - 2\ sin\ \alpha) = 0$

Possibles solucions: $\begin{cases} cos\ \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90°,\ \alpha_2 = 270° \\ 1 - 2\ sin\ \alpha = 0 \rightarrow sin\ \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30°,\ \alpha_4 = 150° \end{cases}$

En comprovar-les sobre l'equació inicial, veiem que totes quatre solucions són vàlides.

Pàgina 135

Fes-ho tu. Resol $\boldsymbol{sin\ 3\alpha - sin\ \alpha = 0}$.

$sin\ 3\alpha - sin\ \alpha = 0$

$2\ cos\ \frac{3\alpha + \alpha}{2}\ sin\ \frac{3\alpha - \alpha}{2} = 0 \rightarrow 2\ cos\ 2\alpha\ sin\ \alpha = 0 \rightarrow cos\ 2\alpha\ sin\ \alpha = 0$

Si $cos\ 2\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 90° \rightarrow \alpha_1 = 45° \\ 2\alpha = 270° \rightarrow \alpha_2 = 135° \\ 2\alpha = 90° + 360° = 450° \rightarrow \alpha_3 = 225° \\ 2\alpha = 270° + 360° = 630° \rightarrow \alpha_4 = 315° \end{cases}$

Si $sin\ \alpha = 0 \rightarrow \alpha_5 = 0°,\ \alpha_6 = 180°$

1 Resol.

a) $\boldsymbol{tg\ \alpha = -\sqrt{3}}$ **b)** $\boldsymbol{sin\ \alpha = cos\ \alpha}$ **c)** $\boldsymbol{sin^2\ \alpha = 1}$ **d)** $\boldsymbol{sin\ \alpha = tg\ \alpha}$

a) $x = 120° + k \cdot 360°$ o bé $x = 300° + k \cdot 360°$

Les dues solucions queden aplegades en:

$x = 120° + k \cdot 180° = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ rad} = x$ amb $k \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ rad amb $k \in \mathbb{Z}$

c) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } sin\ x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \\ \text{Si } sin\ x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ rad amb } k \in \mathbb{Z}$

d) En aquest cas, ha de passar que:

$$\left.\begin{array}{l}\text{O bé } \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \text{ rad} \\ \text{O bé } \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \text{ rad}\end{array}\right\} \rightarrow x = k\pi \text{ rad amb } k \in \mathbb{Z}$$

2 Resol aquestes equacions:

a) $2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$

b) $2\sin^2\alpha - 1 = 0$

c) $tg^2\alpha - tg\,\alpha = 0$

d) $2\sin^2\alpha + 3\cos\alpha = 3$

a) $\cos\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow \alpha_1 = 60°,\ \alpha_2 = 300° \\ -1 \rightarrow \alpha_3 = 180° \end{cases}$

Les tres solucions són vàlides (es comprova en l'equació inicial).

b) $2\sin^2\alpha - 1 = 0 \rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_1 = 45°,\ \alpha_2 = 135°$
- Si $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_3 = -45° = 315°,\ \alpha_4 = 225°$

Totes les solucions són vàlides.

c) $tg^2\alpha - tg\,\alpha = 0 \rightarrow tg\,\alpha\,(tg\,\alpha - 1) = 0 \begin{cases} tg\,\alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0°,\ \alpha_2 = 180° \\ tg\,\alpha = 1 \rightarrow \alpha_3 = 45°,\ \alpha_4 = 225° \end{cases}$

Totes les solucions són vàlides.

d) $2\sin^2\alpha + 3\cos\alpha = 3 \overset{(*)}{\rightarrow} 2(1 - \cos^2\alpha) + 3\cos\alpha = 3$

(*) Com que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$2 - 2\cos^2\alpha + 3\cos\alpha = 3 \rightarrow 2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 = 0$

$\cos\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Aleshores:

- Si $\cos\alpha = 1 \rightarrow \alpha_1 = 0°$
- Si $\cos\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_2 = 60°,\ \alpha_3 = -60° = 300°$

Les tres solucions són vàlides.

3 Transforma en producte $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha$ **i resol després l'equació** $\sin 5\alpha - \sin 3\alpha = 0$.

$$\sin 5\alpha - \sin 3\alpha = 0 \rightarrow 2\cos\frac{5\alpha + 3\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha - 3\alpha}{2} = 0 \rightarrow 2\cos\frac{8\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\cos 4\alpha\,\sin\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos 4\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

- Si $\cos 4\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 90° & \rightarrow \alpha_1 = 22°\,30' \\ 4\alpha = 270° & \rightarrow \alpha_2 = 67°\,30' \\ 4\alpha = 90° + 36° & \rightarrow \alpha_3 = 112°\,30' \\ 4\alpha = 270° + 360° & \rightarrow \alpha_4 = 157°\,30' \end{cases}$
- Si $\sin\alpha = 0 \rightarrow \alpha_5 = 0°,\ \alpha_6 = 180°$

Comprovem que les sis solucions són vàlides.

4 Resol.

a) $4\cos 2\alpha + 3\cos\alpha = 1$

b) $tg\, 2\alpha + 2\cos\alpha = 0$

c) $\sqrt{2}\cos(\alpha/2) - \cos\alpha = 1$

d) $2\sin\alpha\cos^2\alpha - 6\sin^3\alpha = 0$

a) $4\cos 2\alpha + 3\cos\alpha = 1 \rightarrow 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 3\cos\alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 4(\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha)) + 3\cos\alpha = 1 \rightarrow 4(2\cos^2\alpha - 1) + 3\cos\alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow 8\cos^2\alpha - 4 + 3\cos\alpha = 1 \rightarrow 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 5 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-3\pm\sqrt{9+160}}{16} = \dfrac{-3\pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0{,}625 \\ -1 \end{cases}$

- Si $\cos\alpha = 0{,}625 \rightarrow \alpha_1 = 51°\ 19'\ 4{,}13''$, $\alpha_2 = -51°\ 19'\ 4{,}13''$
- Si $\cos\alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180°$

En comprovar les solucions, totes tres són vàlides.

b) $tg\, 2\alpha + 2\cos\alpha = 0 \rightarrow \dfrac{2\, tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} + 2\cos\alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} + \cos\alpha = 0 \rightarrow \dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} + \cos\alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} + \cos\alpha = 0 \rightarrow \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos\alpha(\sin\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \rightarrow \cos\alpha(\sin\alpha + 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha) \rightarrow$

$\rightarrow \cos\alpha(1 + \sin\alpha - 2\sin^2\alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ 1+\sin\alpha - 2\sin^2\alpha = 0 \rightarrow \sin\alpha = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$

- Si $\cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 270°$
- Si $\sin\alpha = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 210°$, $\alpha_4 = 330° = -30°$
- Si $\sin\alpha = 1 \rightarrow \alpha_5 = 90° = \alpha_1$

En comprovar les solucions, veiem que totes són vàlides.

c) $\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\alpha = 1 \rightarrow \sqrt{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} - \cos\alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{1+\cos\alpha} - \cos\alpha = 1 \rightarrow \sqrt{1-\cos\alpha} = 1 + \cos\alpha \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \cos\alpha = 1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha \rightarrow \cos^2\alpha + \cos\alpha = 0 \rightarrow \cos\alpha(\cos\alpha + 1) = 0$

- Si $\cos\alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 270°$
- Si $\cos\alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180°$

En comprovar les solucions, podem veure que les úniques vàlides són: $\alpha_1 = 90°$ i $\alpha_3 = 180°$

d) $2\sin\alpha\cos^2\alpha - 6\sin^3\alpha = 0 \rightarrow 2\sin\alpha(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2\sin\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 4\sin^2\alpha) = 0 \rightarrow 2\sin\alpha(1 - 4\sin^2\alpha) = 0$

- Si $\sin\alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 180°$
- Si $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{4} \rightarrow \sin\alpha = \pm\dfrac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30°$, $\alpha_4 = 150°$, $\alpha_5 = 210°$, $\alpha_6 = 330°$

Comprovem les solucions i observem que totes són vàlides.

5 **Resol les equacions trigonomètriques següents:**

a) $\sin (180° - \alpha) = \cos (270° - \alpha) + \cos 180°$

b) $\sin (45° - \alpha) + \sqrt{2} \sin \alpha = 0$

a) $\sin (180° - \alpha) = \cos (270° - \alpha) + \cos 180°$

$\sin 180° \cos \alpha - \cos 180° \sin \alpha = \cos 270° \cos \alpha + \sin 270° \sin \alpha - 1$

$\sin \alpha = -\sin \alpha - 1 \rightarrow 2 \sin \alpha = -1 \rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 210°, \ \alpha_2 = 330°$

b) $\sin (45° - \alpha) + \sqrt{2} \sin \alpha = 0$

$\sin 45° \cos \alpha - \cos 45° \sin \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 0$

$\cos \alpha - \sin \alpha + 2 \sin \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha + \sin \alpha = 0$

Dividim entre $\cos \alpha$:

$1 + tg\, \alpha = 0 \rightarrow tg\, \alpha = -1 \rightarrow \alpha_1 = 135°, \ \alpha_2 = 315°$

3 Funcions trigonomètriques

Pàgina 137

1 Cert o fals?

a) El radian és una mesura de longitud equivalent al radi.

b) Un radian és un angle una mica menor que 60°.

c) Com que la longitud de la circumferència és $2\pi r$, un angle complet (360°) té 2π radians.

d) Un angle de 180° mesura una mica menys de 3 radians.

e) Un angle recte mesura $\pi/2$ radians.

a) Fals. El radian és una mesura angular, no és una mesura de longitud.

b) Cert, perquè un radian té 57° 17' 45''.

c) Cert, perquè cada radian abraça un arc de longitud r.

d) Fals. 180° és la meitat d'un angle complet i equival, per tant, a π radians, quelcom més de 3 radians.

e) Cert. Un angle recte és la quarta part d'un angle complet i té $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ radians.

2 Passa a radians els angles següents:

a) 30° b) 72° c) 90°

d) 127° e) 200° f) 300°

Expressa el resultat en funció de π i després en forma decimal. Per exemple:

$$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 0,52 \text{ rad}$$

a) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 30° = \frac{\pi}{6}$ rad ≈ 0,52 rad

b) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 72° = \frac{2\pi}{5}$ rad ≈ 1,26 rad

c) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi}{2}$ rad ≈ 1,57 rad

d) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 127° \approx 2,22$ rad

e) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 200° = \frac{10\pi}{9}$ rad ≈ 3,49 rad

f) $\frac{2\pi}{360°} \cdot 300° = \frac{5\pi}{3}$ rad ≈ 5,24 rad

3 Passa a graus els angles següents:

a) 2 rad b) 0,83 rad c) $\frac{\pi}{5}$ rad

d) $\frac{5\pi}{6}$ rad e) 3,5 rad f) π rad

a) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 2 = 114° \, 35' \, 29,6''$

b) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 0,83 = 47° \, 33' \, 19,8''$

c) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36°$

d) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150°$

e) $\frac{360°}{2\pi} \cdot 3,5 = 200° \, 32' \, 6,8''$

f) $\frac{360°}{2\pi} \cdot \pi = 180°$

4 **Copia i completa la taula següent en el quadern i afegeix-hi les raons trigonomètriques (sinus, cosinus i tangent) de cada un dels angles:**

GRAUS	0°	30°		60°	90°		135°	150°	
RADIANS			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			π

GRAUS	210°	225°		270°			330°	360°
RADIANS			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La taula completa és a la pàgina 138 del llibre de text.

Pàgina 138

5 **Cert o fals?**

a) Les funcions trigonomètriques són periòdiques.

b) Les funcions sin **i** cos **tenen un període de** 2π**.**

c) La funció $tg\,x$ **té període** π**.**

d) La funció $cos\,x$ **és com** $sin\,x$ **desplaçada** $\pi/2$ **a l'esquerra.**

a) Cert. La forma de les seves gràfiques es repeteix al llarg de l'eix horitzontal, cada 2π radians.

b) Cert.

$$\left.\begin{array}{l} sin\,(x+2\pi)=sin\,x \\ cos\,(x+2\pi)=cos\,x \end{array}\right\}$$ perquè 2π radians equivalen a una volta completa.

c) Cert.

$tg\,(x+\pi) = tg\,x$

Podem observar-lo en la gràfica de la funció $tg\,x$ a la pàgina 138 del llibre de text.

d) Cert. Es pot observar en les gràfiques de la pàgina 138 del llibre de text.

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 139

1. Raons trigonomètriques a partir d'altres

Fes-ho tu. **Sabent que $\sin 54° = 0{,}81$, troba $\cos 108°$, $tg\ 27°$, $\sin 24°$ i $\cos 99°$.**

$\sin^2 54° + \cos^2 54° = 1 \rightarrow 0{,}81^2 + \cos^2 54° = 1 \rightarrow \cos 54° = \sqrt{1-0{,}81^2} = 0{,}59$

$\cos 108° = \cos(2 \cdot 54°) = \cos^2 54° - \sin^2 54° = 0{,}59^2 - 0{,}81^2 = -0{,}31$

$tg\ 27° = tg\left(\frac{54°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos 54°}{1+\cos 54°}} = \sqrt{\frac{1-0{,}59}{1+0{,}59}} = 0{,}51$

$\sin 24° = \sin(54° - 30°) = \sin 54° \cos 30° - \cos 54° \sin 30° = 0{,}81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}59 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}41$

$\cos 99° = \cos(54° + 45°) = \cos 54° \cos 45° - \sin 54° \sin 45° = 0{,}59 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}16$

2. Identitats trigonomètriques

Fes-ho tu. **Demostra que $\sin 2\alpha - tg\ \alpha \cos 2\alpha = tg\ \alpha$.**

Apliquem les fórmules de l'angle doble i les relacions fonamentals:

$$\sin 2\alpha - tg\ \alpha \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha - tg\ \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}(2 \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = tg\ \alpha$$

3. Simplificació d'expressions trigonomètriques

Fes-ho tu. **Simplifica l'expressió $\frac{2 \cos(45° + \alpha) \cos(45° - \alpha)}{\cos 2\alpha}$.**

$$\frac{2 \cos(45° + \alpha) \cos(45° - \alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{2(\cos 45° \cos \alpha - \sin 45° \sin \alpha)(\cos 45° \cos \alpha + \sin 45° \sin \alpha)}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right)}{\cos 2\alpha} =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 1$$

Pàgina 140

4. Resolució d'equacions trigonomètriques

Fes-ho tu. Resol aquestes equacions:

a) $\sin^3 x - \sin x \cos^2 x = 0$

b) $\sqrt{3}\,\sin x + \cos x = 2$

c) $tg^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$

d) $\frac{\cos 4x + \cos 2x}{\sin 4x - \sin 2x} = 1$

a) Extraiem factor comú: $\sin x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$

Igualem a zero cada factor:

$\sin x = 0 \rightarrow x = 0° + 360° \cdot k;\ x = 180° + 360° \cdot k$

$\sin^2 x - \cos^2 x = 0 \rightarrow \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) = 0 \rightarrow 2\sin^2 x = 1 = \sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, aleshores $x = 45° + 360° \cdot k;\ x = 135° + 360° \cdot k$

Si $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, aleshores $x = 225° + 360° \cdot k;\ x = 315° + 360° \cdot k$

b) Passem $\cos x$ al segon membre i elevem al quadrat després:

$(\sqrt{3}\sin x)^2 = (2 - \cos x)^2 \rightarrow 3\sin^2 x = 4 - 4\cos x + \cos^2 x \rightarrow$

$\rightarrow 3(1 - \cos^2 x) = 4 - 4\cos x + \cos^2 x \rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60° + 360° \cdot k;\ x = 300° + 360° \cdot k$

Comprovem les solucions perquè poden aparèixer falses solucions en elevar al quadrat.

$x = 60° + 360° \cdot k \rightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow$ Val.

$x = 300° + 360° \cdot k \rightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow$ No val.

c) Utilitzem la fórmula de la tangent de l'angle meitat:

$\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)^2 = 1 - \cos x \rightarrow \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = 1 - \cos x \rightarrow 1 - \cos x = 1 - \cos^2 x \rightarrow$

$\rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(1 - \cos x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = 90° + 360° \cdot k;\ x = 270° + 360° \cdot k \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 0° + 360° \cdot k \end{cases}$$

d) Transformem les sumes en productes:

$$\frac{2\cos\frac{4x+2x}{2}\cos\frac{4x-2x}{2}}{2\cos\frac{4x+2x}{2}\sin\frac{4x-2x}{2}} = 1 \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = 1 \rightarrow \frac{1}{tg\,x} = 1 \rightarrow tg\,x = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 45° + 360° \cdot k;\ x = 225° + 360° \cdot k$$

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 141

1. Raons trigonomètriques de (α + β); (α – β); 2α i α/2

Si $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $90° < \alpha < 180°$, ***i*** $\cos\beta = -\frac{1}{4}$, $180° < \beta < 270°$, ***trobar:*** $\cos(\alpha+\beta)$; $\sin(\alpha-\beta)$; $tg\,2\alpha$; $tg\,\frac{\beta}{2}$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \rightarrow$

$\rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$ perquè l'angle és en el segon quadrant.

$tg\,\alpha = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \rightarrow \sin^2\beta + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow \sin^2\beta = \frac{15}{16} \rightarrow$

$\rightarrow \sin\beta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ perquè l'angle és en el tercer quadrant.

$tg\,\beta = \frac{-\sqrt{15}/4}{-1/4} = \sqrt{15}$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{15}+4}{20}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{-4\sqrt{15}-3}{5}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}$$

$$tg\,\frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = -\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}} = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$ ja que l'angle $\frac{\beta}{2}$ és en el segon quadrant.

2. Identitats trigonomètriques

Demostrar que: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin x\cos x\sin x =$$
$$= \cos^3 x - \sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x\cos x = \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x$$

3. Expressions algebraiques equivalents

Escriure l'expressió $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ ***en funció de*** $\cos\alpha$ ***i*** $\sin\beta$.

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$
$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta =$$
$$= \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$$

4. Simplificació d'expressions trigonomètriques

Simplificar aquesta expressió: $2\,tg\,\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha$

$$2\,tg\,\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha = 2\,tg\,\alpha\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right)^2 - \sin\alpha = 2\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2} - \sin\alpha =$$
$$= \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$$

5. Equacions trigonomètriques

Resoldre aquestes equacions:

a) $\boldsymbol{\cos^2(2x + 30°) = \frac{1}{4}}$ ***b)*** $\boldsymbol{4\sin x + 4\cos^2 x\, tg\, x + tg\, x = 0}$***, con*** $\boldsymbol{tg\, x \neq 0}$

a) $\cos(2x + 30°) = \pm\frac{1}{2}$

Si $\cos(2x + 30°) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30° = 60° \rightarrow x = 15° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 300° \rightarrow x = 135° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 60° + 360° \rightarrow x = 195° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 300° + 360° \rightarrow x = 315° + 360° \cdot k \end{cases}$

Si $\cos(2x + 30°) = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30° = 120° \rightarrow x = 45° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 240° \rightarrow x = 105° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 120° + 360° \rightarrow x = 225° + 360° \cdot k \\ 2x + 30° = 240° + 360° \rightarrow x = 285° + 360° \cdot k \end{cases}$

b) Si $tg\, x = 0$, aleshores $x = 0° + 360° \cdot k$; $x = 180° + 360° \cdot k$ són solucions de l'equació, ja que el sinus d'aquests angles també és 0.

Si $tg \neq 0$, dividim aquesta funció en els dos termes de l'equació:

$$\frac{4\sin x}{tg\, x} + 4\cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow \frac{4\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} + 4\cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow 4\cos^2 x + 4\cos x + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120° + 360° \cdot k;\ x = 240° + 360° \cdot k$$

6. Resolució de sistemes d'equacions trigonomètriques

Resoldre el següent sistema d'equacions en l'interval [0°, 360°]:

$$\begin{cases} \cos y - \sin x = 1 \\ 4\sin x \cos y + 1 = 0 \end{cases}$$

$\cos y = 1 + \sin x$

$4\sin x(1 + \sin x) + 1 = 0 \rightarrow 4\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2}$

- Si $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, que és impossible.
- Si $\sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Les diferents possibilitats són:

$\begin{cases} x = 210° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases}$; $\begin{cases} x = 210° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$; $\begin{cases} x = 330° + 360° \cdot k \\ y = 60° + 360° \cdot k \end{cases}$; $\begin{cases} x = 330° + 360° \cdot k \\ y = 300° + 360° \cdot k \end{cases}$

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 142

Per practicar

Fórmules trigonomètriques

1 **Sabent que** $cos\ \alpha = -\frac{3}{4}$ **i** $90° < \alpha < 180°$, **calcula sense trobar el valor de** α:

a) $sin\ 2\alpha$ **b)** $tg\ \frac{\alpha}{2}$ **c)** $sin\ (\alpha + 30°)$

d) $cos\ (60° - \alpha)$ **e)** $cos\ \frac{\alpha}{2}$ **f)** $tg\ (45° + \alpha)$

$sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sin^2\ \alpha + \frac{9}{16} = 1 \rightarrow sin^2\ \alpha = \frac{7}{16} \rightarrow sin\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ja que l'angle és en el 2n quadrant.

$$tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{7}/4}{-3/4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

a) $sin\ 2\alpha = 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$

b) $tg\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{1 + cos\ \alpha}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)}} = \sqrt{7}$ ja que $\frac{\alpha}{2}$ està comprès entre 45° i 90° (és en el 1r quadrant).

c) $sin\ (\alpha + 30°) = sin\ \alpha\ cos\ 30° + cos\ \alpha\ sin\ 30° = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21} - 3}{8}$

d) $cos\ (60° - \alpha) = cos\ 60°\ cos\ \alpha + sin\ 60°\ sin\ \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{-\sqrt{21} - 3}{8}$

e) $cos\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos\ \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ perquè $\frac{\alpha}{2}$ està comprès entre 45° i 90° (és en el 1r quadrant).

f) $tg\ (45° + \alpha) = \frac{tg\ 45° + tg\ \alpha}{1 - tg\ 45°\ tg\ \alpha} = \frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)}{1 - 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)} = \frac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}$

2 **Calcula les raons trigonomètriques de 22° 30' a partir de les de 45°.**

$$sin\ (22°\ 30') = sin\ \frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$cos\ (22°\ 30') = cos\ \frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$tg\ (22°\ 30') = tg\ \frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{1 - \sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

3 **Si** $cos\ 78° = 0,2$ **i** $sin\ 37° = 0,6$, **troba les raons trigonomètriques de 41° i de 115°.**

41° = 78° – 37°

- $sin\ 78° = \sqrt{1 - cos^2\ 78°} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$
- $cos\ 37° = \sqrt{1 - sen^2\ 37°} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$

Ara ja podem calcular:

- $sin\, 41° = sin\,(78° - 37°) = sin\, 78°\, cos\, 37° - cos\, 78°\, sin\, 37° = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$
- $cos\, 41° = cos\,(78° - 37°) = cos\, 78°\, cos\, 37° + sin\, 78°\, sin\, 37° = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$
- $tg\, 41° = \frac{sin\, 41°}{cos\, 41°} = \frac{0,664}{0,748} = 0,8877$
- $sin\, 115° = sin\,(78° + 37°) = sin\, 78°\, cos\, 37° + cos\, 78°\, sin\, 37° = 0,98 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,904$
- $cos\, 115° = cos\,(78° + 37°) = cos\, 78°\, cos\, 37° - sin\, 78°\, sin\, 37° = 0,2 \cdot 0,8 - 0,98 \cdot 0,6 = -0,428$
- $tg\, 115° = \frac{sin\, 115°}{cos\, 115°} = -\frac{0,904}{0,428} = -2,112$

4 a) Troba el valor exacte de les raons trigonomètriques de 75° a partir de les de 30° i 45°.

b) Usant els resultats de l'apartat anterior, calcula les raons trigonomètriques de: 105°; 165°; 15°; 195° i 135°.

a) $sin\, 75° = sin\,(30° + 45°) = sin\, 30°\, cos\, 45° + cos\, 30°\, sin\, 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$cos\, 75° = cos\,(30° + 45°) = cos\, 30°\, cos\, 45° - sin\, 30°\, sin\, 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$tg\, 75° = tg\,(30° + 45°) = \frac{tg\, 30° + tg\, 45°}{1 - tg\, 30°\, tg\, 45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2$

b) $sin\, 105° = sin\,(30° + 75°) = sin\, 30°\, cos\, 75° + cos\, 30°\, sin\, 75° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$cos\, 105° = cos\,(30° + 75°) = cos\, 30°\, cos\, 75° - sin\, 30°\, sin\, 75° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$tg\, 105° = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = -\sqrt{3} - 2$

$sin\, 165° = sin\,(90° + 75°) = sin\, 90°\, cos\, 75° + cos\, 90°\, sin\, 75° = cos\, 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$cos\, 165° = cos\,(90° + 75°) = cos\, 90°\, cos\, 75° - sin\, 90°\, sin\, 75° = -sin\, 75° = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$tg\, 165° = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \sqrt{3} - 2$

$sin\, 15° = sin\,(90° - 75°) = sin\, 90°\, cos\, 75° - cos\, 90°\, sin\, 75° = cos\, 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$cos\, 15° = cos\,(90° - 75°) = cos\, 90°\, cos\, 75° + sin\, 90°\, sin\, 75° = sin\, 75° = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$tg\, 15° = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 2 - \sqrt{3}$

$sin\, 195° = sin\,(270° - 75°) = sin\, 270°\, cos\, 75° - cos\, 270°\, sin\, 75° = -cos\, 75° = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$cos\, 195° = cos\,(270° - 75°) = cos\, 270°\, cos\, 75° + sin\, 270°\, sin\, 75° = -sin\, 75° = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$tg\, 195° = \frac{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{-\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$

$$sin\ 135° = sin\ (180° - 45°) = sin\ 180°\ cos\ 45° - cos\ 180°\ sin\ 45° = sin\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ 135° = cos\ (180° - 45°) = cos\ 180°\ cos\ 45° + sin\ 180°\ sin\ 45° = -cos\ 45° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\ 135° = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$$

5 **Desenvolupa, en funció de les raons trigonomètriques de α, i simplifica les expressions següents:**

a) $sin\ (45° + \alpha) - cos\ (\alpha - 45°)$

b) $\dfrac{cos\ 2\alpha}{cos\ \alpha + sin\ \alpha}$

c) $(sin\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - 2\ sin\ \alpha + cos\ 2\alpha$

d) $cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \cdot sin^2 \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{4} cos^2\ \alpha$

a) $sin\ (45° + \alpha) - cos\ (\alpha - 45°) = sin\ 45°\ cos\ \alpha + cos\ 45°\ sin\ \alpha - (cos\ \alpha\ cos\ 45° + sin\ \alpha\ sin\ 45°) =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} sin\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} cos\ \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} sin\ \alpha = 0$$

b) $\dfrac{cos\ 2\alpha}{cos\ \alpha + sin\ \alpha} = \dfrac{cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha}{cos\ \alpha + sin\ \alpha} = \dfrac{(cos\ \alpha + sin\ \alpha)(cos\ \alpha - sin\ \alpha)}{cos\ \alpha + sin\ \alpha} = cos\ \alpha - sin\ \alpha$

c) $(sin\ \alpha + cos\ \alpha)^2 - 2\ sin\ \alpha + cos\ 2\alpha = sin^2\ \alpha + 2\ sin\ \alpha\ cos\ \alpha + cos^2\ \alpha - 2\ sin\ \alpha + cos^2\ \alpha - sin^2\ \alpha =$

$$= 2(cos^2\ \alpha + sin\ \alpha\ cos\ \alpha - sin\ \alpha)$$

d) $cos^2 \dfrac{\alpha}{2} \cdot sin^2 \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{4} cos^2\ \alpha = \left(\pm\sqrt{\dfrac{1 + cos\ \alpha}{2}}\right)^2 \cdot \left(\pm\sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{2}}\right)^2 + \dfrac{1}{4} cos^2\ \alpha =$

$$= \frac{1 + cos\ \alpha}{2} \cdot \frac{1 - cos\ \alpha}{2} + \frac{1}{4} cos^2\ \alpha = \frac{1 - cos^2\ \alpha}{4} + \frac{cos^2\ \alpha}{4} = \frac{1}{4}$$

6 **Sabent que $cos\ \alpha = \dfrac{-7}{25}$ $(180° < \alpha < 270°)$ i $tg\ \beta = \dfrac{4}{3}$ $(180° < \beta < 270°)$, calcula $tg \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.**

Usem la relació $sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ per calcular $sin\ \alpha$:

$sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sin^2\ \alpha + \dfrac{49}{625} = 1 \rightarrow sin^2\ \alpha = \dfrac{576}{625} \rightarrow sin\ \alpha = -\dfrac{24}{25}$ perquè l'angle és en el 3r quadrant.

$\dfrac{sin\ \beta}{cos\ \beta} = \dfrac{4}{3} \rightarrow sin\ \beta = \dfrac{4}{3} cos\ \beta$

$sin^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow \dfrac{16}{9} cos^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \rightarrow \dfrac{25}{9} cos^2\ \beta = 1 \rightarrow cos^2\ \beta = \dfrac{9}{25} \rightarrow cos\ \beta = -\dfrac{3}{5}$ perquè també pertany al tercer quadrant.

$$sin\ \beta = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

Com que $360° < \alpha + \beta < 540°$, dividint les desigualtats entre 2 tenim que $180° < \dfrac{\alpha + \beta}{2} < 270°$.

Per tant, $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ pertany al tercer quadrant i la tangent de $\dfrac{\alpha + \beta}{2}$ és positiva.

Calculem $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sin\ \alpha\ sin\ \beta = \dfrac{-7}{25} \cdot \dfrac{-3}{5} - \dfrac{-24}{25} \cdot \dfrac{-4}{5} = -\dfrac{3}{5}$

Per tant, $tg \dfrac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ (\alpha + \beta)}{1 + cos\ (\alpha + \beta)}} = \sqrt{\dfrac{1 - (3/5)}{1 + (-3/5)}} = 2$

7 **Si $tg\,\frac{\alpha}{2} = -3$ i $\alpha < 270°$, troba $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$ i $tg\,\alpha$.**

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = -3 \rightarrow \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}} = -3 \rightarrow \frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha} = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - cos\,\alpha = 9 + 9\,cos\,\alpha \rightarrow 10\,cos\,\alpha = -8 \rightarrow cos\,\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$sin\,\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$tg\,\alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

8 **Si $tg\,2\alpha = \sqrt{6}$ i $\alpha < 90°$, troba $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$ i $tg\,\alpha$.**

$$\frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha} = \sqrt{6} \rightarrow 2\,tg\,\alpha = \sqrt{6} - \sqrt{6}\,tg^2\,\alpha \rightarrow \sqrt{6}\,tg^2\,\alpha + 2\,tg\,\alpha - \sqrt{6} = 0 \rightarrow tg\,\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2\sqrt{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$$

Com que α és en el primer quadrant, només pot passar que $tg\,\alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$.

$$sin\,\alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}}\,cos\,\alpha$$

$$\left(\frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}}\right)^2 cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow \frac{8 - 2\sqrt{7}}{6}\,cos^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7 - \sqrt{7}}{3}\,cos^2\,\alpha = 1 \rightarrow cos^2\,\alpha = \frac{3}{7 - \sqrt{7}} \rightarrow cos\,\alpha = \sqrt{\frac{3}{7 - \sqrt{7}}}$$

$$sin\,\alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7 - \sqrt{7}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{7} - 1}{2(7 - \sqrt{7})}}$$

9 **Expressa en función de α i simplifica aquesta expressió:**

$$sin^2\,\frac{\alpha}{2} - cos^2\,\frac{\alpha}{2} + 2\,sin\,(90 - \alpha)$$

$$sin^2\,\frac{\alpha}{2} - cos^2\,\frac{\alpha}{2} + 2\,sin\,(90° - \alpha) = \frac{1 - cos\,\alpha}{2} - \frac{1 + cos\,\alpha}{2} + 2\,(sin\,90°\,cos\,\alpha - cos\,90°\,sin\,\alpha) = -\,cos\,\alpha + 2\,cos\,\alpha = cos\,\alpha$$

10 **Transforma en productes les sumes següents:**

a) $sin\,65° + sin\,35°$ **b)** $sin\,65° - sin\,35°$ **c)** $cos\,48° + cos\,32°$

d) $cos\,48° - cos\,32°$ **e)** $\frac{1}{2} + sin\,50°$ **f)** $\frac{\sqrt{2}}{2} + cos\,75°$

a) $sin\,65° + sin\,35° = 2\,sin\,\frac{65° + 35°}{2}\,cos\,\frac{65° - 35°}{2} = 2\,sin\,50°\,cos\,15°$

b) $sin\,65° - sin\,35° = 2\,cos\,\frac{65° + 35°}{2}\,sin\,\frac{65° - 35°}{2} = 2\,cos\,50°\,sin\,15°$

c) $cos\,48° + cos\,32° = 2\,cos\,\frac{48° + 32°}{2}\,cos\,\frac{48° - 32°}{2} = 2\,cos\,40°\,cos\,8°$

d) $cos\,48° - cos\,32° = -2\,sin\,\frac{48° + 32°}{2}\,sin\,\frac{48° - 32°}{2} = -2\,sin\,40°\,sin\,8°$

e) $\frac{1}{2} + sin\,50° = sin\,30° + sin\,50° = 2\,sin\,\frac{30° + 50°}{2}\,cos\,\frac{30° - 50°}{2} = 2\,sin\,40°\,cos\,(-10°) = 2\,sin\,40°\,cos\,10°$

f) $\frac{\sqrt{2}}{2} + cos\,75° = cos\,45° + cos\,75° = 2\,cos\,\frac{45° + 75°}{2}\,cos\,\frac{45° - 75°}{2} = 2\,cos\,60°\,cos\,(-15°) = 2\,cos\,60°\,cos\,15°$

Identitats trigonomètriques

11 **Demostra les identitats següents tenint en compte les relacions fonamentals:**

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 4\sin\alpha\cos\alpha$

b) $\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^3\alpha = \sin\alpha$

c) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$

d) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \cdot \cos 2\alpha = 1 + \sin 2\alpha$

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - (\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) =$

$= \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha$

b) $\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^3\alpha = \sin\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \sin\alpha \cdot 1 = \sin\alpha$

c) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \dfrac{2\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$

d) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} \cdot \cos 2\alpha = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha) =$

$= (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha =$

$= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + \sin 2\alpha$

12 **Prova que són certes les identitats següents:**

a) $\cos(x + 60°) - \cos(x + 120°) = \cos x$

b) $tg(x + 45°) - tg(x - 45°) = \dfrac{2 + 2\,tg^2 x}{1 - tg^2 x}$

a) $\cos(x + 60°) - \cos(x + 120°) = \cos x \cos 60° - \sin x \sin 60° - (\cos x \cos 120° - \sin x \sin 120°) =$

$= \cos x \cos 60° - \sin x \sin 60° - \cos x \cos 120° + \sin x \sin 120° =$

$= \cos x \cos 60° - \sin x \sin 60° - \cos x \cdot (-\cos 60°) + \sin x \sin 60° =$

$= 2\cos x \cos 60° = 2 \cdot \dfrac{1}{2}\cos x = \cos x$

b) $tg(x + 45°) - tg(x - 45°) = \dfrac{tg\,x + tg\,45°}{1 - tg\,x\,tg\,45°} - \dfrac{tg\,x - tg\,45°}{1 + tg\,x\,tg\,45°} = \dfrac{tg\,x + 1}{1 - tg\,x} - \dfrac{tg\,x - 1}{1 + tg\,x} =$

$= \dfrac{1 + 2\,tg\,x + tg^2 x - (-1 + 2\,tg\,x - tg^2 x)}{(1 - tg\,x)(1 + tg\,x)} = \dfrac{2 + 2\,tg^2 x}{1 - tg^2 x}$

13 **Comprova que es verifiquen les dues identitats següents:**

a) $\sin\alpha \sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos\beta$

b) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$

* ***En b), divideix numerador i denominador entre $\cos\alpha\cos\beta$.***

a) $\sin\alpha\sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha\cos(\alpha + \beta) = \sin\alpha(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) + \cos\alpha(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$

$= \sin^2\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta =$

$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\cos\beta = \cos\beta$

b) $\dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta} = \dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$

14 **Demostra.**

a) $tg\,\alpha + \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

b) $2\,tg\,\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin\alpha = tg\,\alpha$

a) $tg\,\alpha + \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$

b) $2\,tg\,\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin\alpha = 2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{1 + \cos\alpha}{2} - \sin\alpha = \dfrac{2}{2}\,\dfrac{\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$

15 **Demostra.**

a) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

b) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

a) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=$

$$=\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=$$

$$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=(1-\sin^2\alpha)\cos^2\beta-\sin^2\alpha(1-\cos^2\beta)=$$

$$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$$

b) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta+\cos\alpha\sin\beta\sin\alpha\cos\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=$$

$$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta=$$

$$=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

16 **Demostra les igualtats següents:**

a) $\dfrac{2\sin\alpha}{tg\,2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$

b) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos 2\alpha}=2\,tg^2\alpha$

c) $\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha=\sin\alpha$

d) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=tg^2\dfrac{\alpha}{2}$

e) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=tg\,\alpha$

a) $$\frac{2\sin\alpha}{tg\,2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(1-tg^2\alpha)}{2\,tg\,\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\,\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha$$

b) $$\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos 2\alpha}=\frac{1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\,tg^2\alpha$$

c) $\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$

$$=2\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin^3\alpha=\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin^3\alpha=$$

$$=\sin\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\sin\alpha$$

d) $$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=tg^2\frac{\alpha}{2}$$

e) $$\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\overset{(*)}{=}\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=tg\,\alpha$$

(*) $1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\ \rightarrow\ -\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-1$

17 **Comprova, sense utilitzar la calculadora, les igualtats següents.**

a) $\sin 130°+\sin 50°=2\cos 40°$

b) $\cos 75°-\cos 15°=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a) $$\sin 130°+\sin 50°=2\sin\frac{130°+50°}{2}\cos\frac{130°-50°}{2}=2\sin 90°\cos 40°=2\cos 40°$$

b) $$\cos 75°-\cos 15°=-2\sin\frac{75°+15°}{2}\sin\frac{75°-15°}{2}=-2\sin 45°\sin 30°=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pàgina 143

Equacions trigonomètriques

18 **Resol les equacions següents:**

a) $2\ sin^2 x = 1$ **b)** $3\ tg^2 x - 1 = 0$ **c)** $1 - 4\ cos^2 x = 0$ **d)** $3\ tg\ x + 4 = 0$

a) $2\ sin^2 x = 1 \rightarrow sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow sin\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sin\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45° + 360° \cdot k;\ x = 135° + 360° \cdot k$
- Si $sin\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 225° + 360° \cdot k;\ x = 315° + 360° \cdot k$

És a dir, les solucions són tots els angles del tipus $x = 45° + 90° \cdot k$

b) $3\ tg^2 x - 1 = 0 \rightarrow tg^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow tg\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

- Si $tg\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30° + 360° \cdot k;\ x = 210° + 360° \cdot k$
- Si $tg\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 150° + 360° \cdot k;\ x = 330° + 360° \cdot k$

c) $1 - 4\ cos^2 x = 0 \rightarrow cos^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow cos\ x = \pm \frac{1}{2}$

- Si $cos\ x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60° + 360° \cdot k;\ x = 300° + 360° \cdot k$
- Si $cos\ x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120° + 360° \cdot k;\ x = 240° + 360° \cdot k$

d) $3\ tg\ x + 4 = 0 \rightarrow tg\ x = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 126° 52' 12'' + 360° \cdot k;\ x = 306° 52' 12'' + 360° \cdot k$

19 **Resol aquestes equacions:**

a) $2\ cos^2 x - sin^2 x + 1 = 0$

b) $sin^2 x - sin\ x = 0$

c) $2\ cos^2 x - \sqrt{3}\ cos\ x = 0$

a) $\left.2\ cos^2 x - \underbrace{sin^2 x + 1}_{cos^2 x} = 0\right\} \rightarrow 2\ cos^2 x - cos^2 x = 0$

$cos^2 = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

En comprovar-les en l'equació inicial, les dues solucions són vàlides. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

Cosa que podem expressar com:

$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

b) $sin\ x\ (sin\ x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} sin\ x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\ sin\ x = 1 \rightarrow x_3 = 90° \end{cases}$

Comprovant les possibles solucions, veiem que totes tres són vàlides. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

O, d'una altra manera:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k\pi = k \cdot 180° \\ x_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = 90° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

(x_1 així inclou les solucions x_1 i x_2 anteriors)

c) $cos\, x\,(2\, cos\, x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} cos\, x = 0 \rightarrow x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\ cos\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_3 = 30°,\ x_4 = 330° \end{cases}$

Les quatre solucions són vàlides. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 = 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 = 330° + k \cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Observeu que les dues primeres solucions podrien escriure's com una sola de la manera següent:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

20 **Resol.**

a) $sin^2 x - cos^2 x = 1$ **b)** $cos^2 x - sin^2 x = 0$ **c)** $2\, cos^2 x + sin\, x = 1$ **d)** $3\, tg^2 x - \sqrt{3}\, tg\, x = 0$

a) $(1 - cos^2 x) - cos^2 x = 1 \rightarrow 1 - 2\, cos^2 x = 1 \rightarrow cos^2 x = 0 \rightarrow cos\, x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

Les dues solucions són vàlides. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

O, el que és el mateix:

$$x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

b) $(1 - sin^2 x) - sin^2 x = 0 \rightarrow 1 - 2\, sin^2 x = 0 \rightarrow sin^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow sin\, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

- Si $sin\, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 45°,\ x_2 = 135°$
- Si $sin\, x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_3 = 225°,\ x_4 = 315°$

Comprovem que totes les solucions són vàlides. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_2 = 135° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_3 = 225° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 = 315° + k \cdot 360° = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

O, el que és el mateix:

$$x = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2(1-sin^2 x)+sin\, x=1 \rightarrow 2-2\,sin^2 x+sin\, x=1 \rightarrow 2\,sin^2 x-sin\, x-1=0 \rightarrow$

$$\rightarrow sin\, x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}= \begin{cases} 1 \rightarrow x_1=90^\circ \\ -1/2 \rightarrow x_2=210^\circ,\ x_3=330^\circ \end{cases}$$

Les tres solucions són vàlides; és a dir:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=90^\circ+k\cdot 360^\circ=\frac{\pi}{2}+2k\,\pi \\ x_2=210^\circ+k\cdot 360^\circ=\frac{7\pi}{6}+2k\,\pi \\ x_3=330^\circ+k\cdot 360^\circ=\frac{11\pi}{6}+2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ amb } k\in\mathbb{Z}$$

d) $tg\, x(3\,tg\, x-\sqrt{3})=0 \rightarrow \begin{cases} tg\, x=0 \rightarrow x_1=0^\circ,\ x_2=180^\circ \\ tg\, x=\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x_3=30^\circ,\ x_4=210^\circ \end{cases}$

Comprovem les possibles solucions en l'equació inicial i veiem que totes quatre són vàlides. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=k\cdot 360^\circ=2k\,\pi \\ x_2=180^\circ+k\cdot 360^\circ=\pi+2k\,\pi \\ x_3=30^\circ+k\cdot 360^\circ=\frac{\pi}{6}+2k\,\pi \\ x_4=210^\circ+k\cdot 360^\circ=\frac{7\pi}{6}+2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ amb } k\in\mathbb{Z}$$

Cosa que podria expressar-se amb només dues solucions que englobaran les quatre anteriors:

$x_1=k\cdot 180^\circ=k\,\pi$ y $x_2=30^\circ+k\cdot 180^\circ=\frac{\pi}{6}+k\,\pi$ amb $k\in\mathbb{Z}$

21 Resol les equacions següents:

a) $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{2}}$

b) $\boldsymbol{sin\, 2x-2\,cos^2 x=0}$

c) $\boldsymbol{cos\, 2x-3\,sin\, x+1=0}$

d) $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sqrt{2}\,sin\, x=0}$

a) $sin\frac{\pi}{6}cos\, x-cos\frac{\pi}{6}sin\, x+cos\frac{\pi}{3}cos\, x+sin\frac{\pi}{3}sin\, x=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}cos\, x-\frac{\sqrt{3}}{2}sin\, x+\frac{1}{2}cos\, x+\frac{\sqrt{3}}{2}sin\, x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}cos\, x+\frac{1}{2}cos\, x=\frac{1}{2} \rightarrow cos\, x=\frac{1}{2} \begin{cases} x_1=\pi/3 \\ x_2=5\pi/3 \end{cases}$$

Comprovem i veiem que:

$$x_1 \rightarrow sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+cos\, 0=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

$$x_2 \rightarrow sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)=sin\left(-\frac{3\pi}{3}\right)+cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Són vàlides les dues solucions. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{3}+2k\,\pi=60^\circ+k\cdot 360^\circ \\ x_2=\frac{5\pi}{3}+2k\,\pi=300^\circ+k\cdot 360^\circ \end{array}\right\} \text{ amb } k\in\mathbb{Z}$$

b) $2\,sin\, x\,cos\, x-2\,cos^2 x=0 \rightarrow 2\,cos\, x(sin\, x-cos\, x)=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\, x=0 \rightarrow x_1=90^\circ,\ x_2=270^\circ \\ sin\, x=cos\, x \rightarrow x_3=45^\circ,\ x_4=225^\circ \end{cases}$$

Comprovem les solucions. Totes són vàlides.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270° + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_3 = 45° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi \\ x_4 = 225° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

També podríem expressar-les com:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{4} + k\,\pi \end{array}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

c) $cos^2\, x - sin^2\, x - 3\, sin\, x + 1 = 0 \rightarrow 1 - sin^2\, x - sin^2\, x - 3\, sin\, x + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - 2\, sin^2\, x - 3\, sin\, x + 1 = 0 \rightarrow 2\, sin^2\, x + 3\, sin\, x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow sin\, x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 30°,\ x_2 = 150° \\ -2 \rightarrow \text{Impossible!, ja que } |sin\, x| \leq 1 \end{cases}$

Comprovem que les dues solucions són vàlides. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\ x_2 = 150° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

d) $sin\,\frac{\pi}{4}\, cos\, x + cos\,\frac{\pi}{4}\, sin\, x - \sqrt{2}\, sin\, x = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\, cos\, x + \frac{\sqrt{2}}{2}\, sin\, x - \sqrt{2}\, sin\, x = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\, cos\, x - \frac{\sqrt{2}}{2}\, sin\, x = 0 \rightarrow cos\, x - sin\, x = 0 \rightarrow cos\, x = sin\, x \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{5\pi}{4}$

En comprovar-ho, podem veure que ambdues solucions són vàlides. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\,\pi = 45° + k \cdot 360° \\ x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2k\,\pi = 225° + k \cdot 360° \end{array}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

Podem agrupar les dues solucions en: $x = \frac{\pi}{4} + k\,\pi = 45° + k \cdot 180°$ amb $k \in \mathbb{Z}$

22 Resol.

a) $cos^2\,\frac{x}{2} + cos\, x - \frac{1}{2} = 0$

b) $tg^2\,\frac{x}{2} + 1 = cos\, x$

c) $2\, sin^2\,\frac{x}{2} + cos\, 2x = 0$

d) $4\, sin^2\, x\, cos^2\, x + 2\, cos^2\, x - 2 = 0$

a) $\frac{1 + cos\, x}{2} + cos\, x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow 1 + cos\, x + 2\, cos\, x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 3\, cos\, x = 0 \rightarrow cos\, x = 0 \begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \end{cases}$

Les dues solucions són vàlides. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\ x_2 = 270 + k \cdot 360° = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupant les solucions: $x = 90° + k \cdot 180° = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+1=\cos x \rightarrow 1-\cos x+1+\cos x=\cos x+\cos^2 x \rightarrow$

$\rightarrow 2=\cos x+\cos^2 x \rightarrow \cos^2 x+\cos x-2=0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$ $\begin{cases} 1 \rightarrow x=0° \\ -2 \rightarrow \text{Impossible!, ja que } |\cos x|\le 1 \end{cases}$

Aleshores: $x=k\cdot 360°=2k\pi$ amb $k\in\mathbb{Z}$

c) $2\cdot\frac{1-\cos x}{2}+\cos^2 x-\sin^2 x=0 \rightarrow 1-\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=0 \rightarrow$

$\rightarrow 1-\cos x+\cos^2 x-1+\cos^2 x=0 \rightarrow 2\cos^2 x-\cos x=0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos x\,(2\cos x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \rightarrow x_1=90°,\ x_2=270° \\ \cos x=1/2 \rightarrow x_3=60°,\ x_4=300° \end{cases}$

Comprovem que totes són vàlides. Per tant:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=90°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x_2&=270°+k\cdot 360°=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \\ x_3&=60°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x_4&=300°+k\cdot 360°=\frac{5\pi}{3}+2k\pi \end{aligned}\right\} \text{ amb } k\in\mathbb{Z}$$

Agrupant les solucions quedaria:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=90°+k\cdot 180°=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x_2&=60°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x_3&=300°+k\cdot 360°=\frac{5\pi}{3}+2k\pi \end{aligned}\right\} \text{ amb } k\in\mathbb{Z}$$

d) $4(1-\cos^2 x)\cos^2 x+2\cos^2 x-2=0 \rightarrow 4\cos^2 x-4\cos^4 x+2\cos^2 x-2=0 \rightarrow$

$\rightarrow 4\cos^4 x-6\cos^2 x+2=0 \rightarrow 2\cos^4 x-3\cos^2 x+1=0$

Sigui $\cos^2 x=z \rightarrow \cos^4 x=z^2$

Així:

$2z^2-3z+1=0 \rightarrow z=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}$ $\begin{cases} z_1=1 \rightarrow \cos x=\pm 1 \begin{cases} x_1=0° \\ x_2=180° \end{cases} \\ z_2=\frac{1}{2} \rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} x_3=45°,\ x_4=315° \\ x_5=135°,\ x_6=225° \end{cases} \end{cases}$

Comprovant les possibles solucions, veiem que totes són vàlides. Per tant:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=k\cdot 360°=2k\pi \\ x_2&=180°+k\cdot 360°=\pi+2k\pi \\ x_3&=45°+k\cdot 360°=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x_4&=315°+k\cdot 360°=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \\ x_5&=135°+k\cdot 360°=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ x_6&=225°+k\cdot 360°=\frac{7\pi}{4}+2k\pi \end{aligned}\right\} \text{ amb } k\in\mathbb{Z}$$

O, agrupant les solucions:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 45° + k \cdot 90° = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

23 **Transforma aquestes equacions en unes altres d'equivalents la incògnita de les quals sigui $tg\,x$ i resol-les:**

a) $\boldsymbol{sin\,x + cos\,x = 0}$

b) $\boldsymbol{sin^2 x - 2\sqrt{3}\ sin\,x\,cos\,x + 3\,cos^2 x = 0}$

c) $\boldsymbol{sin^2 x + sin\,x\,cos\,x = 0}$

a) Dividim tota l'equació entre $cos\,x$:

$$\frac{sin\,x}{cos\,x} + \frac{cos\,x}{cos\,x} = 0 \to tg\,x + 1 = 0 \to tg\,x = -1 \to x = 135° + 360° \cdot k \propto x = 315° + 360° \cdot k$$

b) Dividim tota l'equació entre $cos^2 x$:

$$\frac{sin^2 x}{cos^2 x} - 2\sqrt{3}\,\frac{sin\,x\,cos\,x}{cos^2 x} + 3\,\frac{cos^2 x}{cos^2 x} = 0 \to tg^2 x - 2\sqrt{3}\,tg\,x + 3 = 0 \to$$

$$\to tg\,x = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3} \to x = 60° + 360° \cdot k;\ x = 240° + 360° \cdot k$$

c) Dividim tota l'equació entre $cos^2 x$:

$$\frac{sin^2 x}{cos^2 x} + \frac{sin\,x\,cos\,x}{cos^2 x} = 0 \to tg^2 x + tg\,x = 0 \to tg\,x\,(tg\,x + 1) = 0 \to \begin{cases} tg\,x = 0 \\ tg\,x = -1 \end{cases}$$

- Si $tg\,x = 0 \to x = 0° + 360° \cdot k;\ x = 180° + 360° \cdot k$
- Si $tg\,x = -1 \to x = 135° + 360° \cdot k;\ x = 315° + 360° \cdot k$

24 **Resol les equacions següents:**

a) $\boldsymbol{\sqrt{3}\ cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + cos\,(x - \pi) = 2}$

b) $\boldsymbol{cos\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + sin\,x - \sqrt{3}\ cos\,x = 0}$

c) $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1}$

d) $\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sqrt{3}\ sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1}$

a) $\sqrt{3}\left(cos\,\frac{3\pi}{2}\,cos\,x - sin\,\frac{3\pi}{2}\,sin\,x\right) + cos\,x\,cos\,\pi + sin\,x\,sin\,\pi = 2 \to$

$\to \sqrt{3}\,sin\,x - cos\,x = 2 \to \sqrt{3}\,sin\,x - 2 = cos\,x$

Elevem al quadrat els dos membres de la igualtat:

$$3\,sin^2 x - 4\sqrt{3}\,sin\,x + 4 = cos^2 x \to 3\,sin^2 x - 4\sqrt{3}\,sin\,x + 4 = 1 - sin^2 x \to$$

$$\to 4\,sin^2 x - 4\sqrt{3}\,sin\,x + 3 = 0 \to sin\,x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to$$

$$\to x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

Ara hem de comprovar les solucions perquè poden aparèixer falses solucions en elevar al quadrat.

$x = \frac{\pi}{3} \to \sqrt{3} \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1 \neq 2$ No val.

$x = \frac{2\pi}{3} \to \sqrt{3} \cdot cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + cos\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) = 2$ Val.

b) $cos\,\frac{5\pi}{6}\,cos\,x + sin\,\frac{5\pi}{6}\,sin\,x + sin\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0 \rightarrow -\frac{\sqrt{3}\,cos\,x}{2} + \frac{sin\,x}{2} + sin\,x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{3}{2}\,sin\,x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,cos\,x$

Dividim els dos membres entre $cos\,x$:

$\frac{3}{2}\,tg\,x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow tg\,x = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k;\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot k$

c) $sin\,\frac{\pi}{4}\,cos\,x + cos\,\frac{\pi}{4}\,sin\,x + cos\,\frac{\pi}{4}\,cos\,x - sin\,\frac{\pi}{4}\,sin\,x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(cos\,x + sin\,x + cos\,x - sin\,x) = 1 \rightarrow 2\,cos\,x = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow$

$\rightarrow cos\,x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k;\ x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot k$

d) $cos\,\frac{\pi}{3}\,cos\,x + sin\,\frac{\pi}{3}\,sin\,x - \sqrt{3}\left(sin\,\frac{\pi}{3}\,cos\,x - cos\,\frac{\pi}{3}\,sin\,x\right) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{cos\,x}{2} + \frac{\sqrt{3}\,sin\,x}{2} - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}\,cos\,x}{2} - \frac{sin\,x}{2}\right) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow cos\,x + \sqrt{3}\,sin\,x - 3\,cos\,x + \sqrt{3}\,sin\,x = 2 \rightarrow$

$\rightarrow -2\,cos\,x + 2\sqrt{3}\,sin\,x = 2 \rightarrow \sqrt{3}\,sin\,x = 1 + cos\,x$

Elevem al quadrat els dos membres de la igualtat:

$3\,sin^2\,x = 1 + 2\,cos\,x + cos^2\,x \rightarrow 3 - 3\,cos^2\,x = 1 + 2\,cos\,x + cos^2\,x \rightarrow$

$\rightarrow 4\,cos^2\,x + 2\,cos\,x - 2 = 0 \rightarrow 2\,cos^2\,x + cos\,x - 1 = 0 \rightarrow cos\,x = \frac{-1 \pm 3}{4}$

- Si $cos\,x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k$
- Si $cos\,x = -1 \rightarrow x = \pi + 2\pi \cdot k$

Ara hem de comprovar les solucions perquè poden aparèixer falses solucions en elevar al quadrat.

- Si $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ Val.
- Si $x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \cdot sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right) = -2 \neq 1$ No val.
- Si $x = \pi \rightarrow cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) - \sqrt{3} \cdot sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) = 1$ Val.

25 **Resol les equacions següents:**

a) $\boldsymbol{cos\,2x + 3\,sin\,x = 2}$ **b)** $\boldsymbol{tg\,2x \cdot tg\,x = 1}$

c) $\boldsymbol{cos\,x\,cos\,2x + 2\,cos^2\,x = 0}$ **d)** $\boldsymbol{2\,sin\,x = tg\,2x}$

e) $\boldsymbol{\sqrt{3}\,sin\,\frac{x}{2} + cos\,x - 1 = 0}$ **f)** $\boldsymbol{sin\,2x\,cos\,x = 6\,sin^3\,x}$

g) $\boldsymbol{tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + tg\,x = 1}$

a) $cos^2\,x - sin^2\,x + 3\,sin\,x = 2 \rightarrow 1 - sin^2\,x - sin^2\,x + 3\,sin\,x = 2 \rightarrow 2\,sin^2\,x - 3\,sin\,x + 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow sin\,x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$ ⟨ $1 \rightarrow x_1 = 90°$; $1/2 \rightarrow x_2 = 30°,\ x_3 = 150°$

Les tres solucions són vàlides:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k\cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 30° + k\cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\[2ex] x_3 = 150° + k\cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{amb}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

b) $\dfrac{2\,tg\,x}{1-tg^2\,x}\cdot tg\,x = 1 \;\rightarrow\; 2\,tg^2\,x = 1 - tg^2\,x \;\rightarrow\; tg^2\,x = \dfrac{1}{3} \;\rightarrow\; tg\,x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 30°,\ x_2 = 210° \\ x_3 = 150°,\ x_4 = 330° \end{cases}$

Les quatre solucions són vàlides:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k\cdot 360° = \dfrac{\pi}{6} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 210° + k\cdot 360° = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\,\pi \\[2ex] x_3 = 150° + k\cdot 360° = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\,\pi \\[2ex] x_4 = 330° + k\cdot 360° = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{amb}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

Agrupant:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k\cdot 180° = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi \\[2ex] x_2 = 150° + k\cdot 180° = \dfrac{5\pi}{6} + k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{amb}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

c) $cos\,x\,(cos^2\,x - sin^2\,x) + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x\,(cos^2\,x - 1 + cos^2\,x) + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2\,cos^3\,x - cos\,x + 2\,cos^2\,x = 0 \;\rightarrow\; cos\,x\,(2\,cos^2\,x + 2\,cos\,x - 1) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} cos\,x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 90°,\ x_2 = 270° \\[1ex] cos\,x = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+8}}{4} = \dfrac{-2\pm 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- $\approx -1{,}366 \;\rightarrow$ Impossible!, ja que $|\,cos\,x\,| \le -1$
- $\approx 0{,}366 \;\rightarrow\; x_3 = 68°\,31'\,51{,}1'',\ x_4 = 291°\,28'\,8{,}9''$

Les solucions són totes vàlides:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k\cdot 360° = \dfrac{\pi}{2} + 2k\,\pi \\[2ex] x_2 = 270° + k\cdot 360° = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \\[1ex] x_3 = 68°\,31'\,51{,}5'' + k\cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\,\pi \\ x_4 = 291°\,28'\,8{,}9'' + k\cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{amb}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

Agrupades, serien:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 90° + k\cdot 180° = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \\[1ex] x_2 = 68°\,31'\,51{,}1'' + k\cdot 360° \approx 0{,}38\pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 291°\,28'\,8{,}9'' + k\cdot 360° \approx 1{,}62\pi + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{amb}\ \ k\in\mathbb{Z}$$

d) $2\,sin\,x = \dfrac{2\,tg\,x}{1-tg^2\,x} \;\rightarrow\; 2\,sin\,x - 2\,sin\,x\,tg^2\,x = 2\,tg\,x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sin\,x - sin\,x\,\dfrac{sin^2\,x}{cos^2\,x} = \dfrac{sin\,x}{cos\,x} \;\rightarrow\; sin\,x\,cos^2\,x - sin\,x\,sin^2\,x = sin\,x\,cos\,x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sin\,x\,(cos^2\,x - sin^2\,x - cos\,x) = 0 \;\rightarrow\; sin\,x\,(cos^2\,x - 1 + cos^2 x - cos\,x) = 0 \;\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} sin\,x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0°,\ x_2 = 180° \\[1ex] 2\,cos^2\,x - cos\,x - 1 = 0° \;\rightarrow\; cos\,x = \dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \end{cases}$$

- $1 \;\rightarrow\; x_3 = 0° = x_1$
- $-1/2 \;\rightarrow\; x_4 = 240°,\ x_5 = 120°$

Les quatre solucions són vàlides. Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_4 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_5 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

Que, agrupant solucions, quedaria:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

e) $\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}} + \cos x - 1 = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{3 - 3\cos x}{2} = (1-\cos x)^2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 3 - 3\cos x = 2\,(1 + \cos^2 x - 2\cos x) \;\rightarrow\; 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \cos x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \;\rightarrow\; x_1 = 0° \\ -1/2 \;\rightarrow\; x_2 = 120°,\; x_3 = 240° \end{cases}$

En comprovar-ho, veiem que les tres solucions són vàlides:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 120° + k \cdot 360° = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\,\pi \\ x_3 = 240° + k \cdot 360° = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\,\pi \end{array}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

f) $2\sin x \cos x \cos x = 6\sin^3 x \;\rightarrow\; 2\sin x \cos^2 x = 6\sin^3 x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2\sin x\,(1 - \sin^2 x) = 6\sin^3 x \;\rightarrow\; 2\sin x - 2\sin^3 x = 6\sin^3 x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \sin x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180°$

$\sin^2 x = \dfrac{1}{4} \;\rightarrow\; \sin x = \pm\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x_3 = 30°,\; x_4 = 150° \\ x_5 = 210°,\; x_6 = 330° \end{cases}$

Comprovem que totes les solucions són vàlides.

Donem les solucions agrupant les dues primeres per un costat i la resta per un altre:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 30° + k \cdot 90° = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

g) $\dfrac{tg\,(\pi/4) + tg\,x}{1 - tg\,(\pi/4)\,tg\,x} + tg\,x = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{1 + tg\,x}{1 - tg\,x} + tg\,x = 1 \;\rightarrow\; 1 + tg\,x + tg\,x - tg^2 x = 1 - tg\,x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; tg^2 x - 3\,tg\,x = 0 \;\rightarrow\; tg\,x\,(tg\,x - 3) = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \begin{cases} tg\,x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0°,\; x_2 = 180° \\ tg\,x = 3 \;\rightarrow\; x_3 = 71°\,33'\,54{,}2'',\; x_4 = 251°\,33'\,54{,}2'' \end{cases}$

Les quatre solucions són vàlides:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 360° = 2k\,\pi \\ x_2 = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\,\pi \\ x_3 = 71°\,33'\,54,2'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{2\pi}{5} + 2k\,\pi \\ x_4 = 251°\,33'\,54,2'' + k \cdot 360° \approx \dfrac{7\pi}{5} + 2k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{amb}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

O, el que és el mateix:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = k \cdot 180° = k\,\pi \\ x_2 = 71°\,33'\,54,2'' + k \cdot 180° \approx \dfrac{2\pi}{5} + k\,\pi \end{array}\right\}\ \text{amb}\ \ k \in \mathbb{Z}$$

Angles en radians

26 Expressa en graus els angles següents donats en radians:

$$\frac{5\pi}{6};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{4\pi}{9};\ \frac{3\pi}{5};\ 1,5;\ 3,2$$

$\frac{5\pi}{6}\text{ rad} = \frac{5 \cdot 180°}{6} = 150°$ $\quad \frac{7\pi}{3}\text{ rad} = \frac{7 \cdot 180°}{3} = 420°$ $\quad \frac{4\pi}{9}\text{ rad} = \frac{4 \cdot 180°}{9} = 80°$

$\frac{3\pi}{5}\text{ rad} = \frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°$ $\quad 1,5\text{ rad} = \frac{1,5 \cdot 180°}{\pi} = 85°\,56'\,37''$ $\quad 3,2\text{ rad} = \frac{3,2 \cdot 180°}{\pi} = 183°\,20'\,47''$

27 Passa a radians els angles següents. Expressa'ls en funció de π:

135°; 210°; 108°; 72°; 126°; 480°

$$135° = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4}\text{ rad}$$

$$210° = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6}\text{ rad}$$

$$108° = \frac{108 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{5}\text{ rad}$$

$$72° = \frac{72 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{5}\text{ rad}$$

$$126° = \frac{126 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{10}\text{ rad}$$

$$480° = \frac{480 \cdot \pi}{180} = \frac{8\pi}{3}\text{ rad}$$

28 Prova que:

a) $4\,sin\,\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\,cos\,\frac{\pi}{4} + cos\,\pi = 2$

b) $2\sqrt{3}\,sin\,\frac{2\pi}{3} + 4\,sin\,\frac{\pi}{6} - 2\,sin\,\frac{\pi}{2} = 3$

c) $sin\,\frac{2\pi}{3} - cos\,\frac{7\pi}{6} + tg\,\frac{4\pi}{3} + tg\,\frac{11\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

a) $4\,sin\,\frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\,cos\,\frac{\pi}{4} + cos\,\pi = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$

b) $2\sqrt{3}\,sin\,\frac{2\pi}{3} + 4\,sin\,\frac{\pi}{6} - 2\,sin\,\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$

c) $sin\,\frac{2\pi}{3} - cos\,\frac{7\pi}{6} + tg\,\frac{4\pi}{3} + tg\,\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

29 **Troba el valor exacte de cada una d'aquestes expressions sense usar la calculadora:**

a) $5\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2\cos\pi - \cos\frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b) $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi$

c) $\cos\frac{5\pi}{3} + tg\frac{4\pi}{3} - tg\frac{7\pi}{6}$

d) $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}$

Comprova els resultats amb calculadora.

a) $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) $\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

30 **Troba les raons trigonomètriques dels angles següents i indica, sense passar a graus, en quin quadrant és cada un:**

a) 0,8 rad **b)** 3,2 rad **c)** 2 rad **d)** 4,5 rad

e) $\pi/8$ rad **f)** $7\pi/4$ rad **g)** $3\pi/5$ rad **h)** $1{,}2\pi$ rad

* *Tingues en compte que:* $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$; $\pi \approx 3{,}14$; $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}7$; $2\pi \approx 6{,}28$.

Per saber en quin quadrant és cada un, podem usar també els signes de les raons trigonomètriques.

a) $\sin 0{,}8 = 0{,}72$	$\cos 0{,}8 = 0{,}50$	$tg\ 0{,}8 = 1{,}03 \rightarrow$ Quadrant I
b) $\sin 3{,}2 = -0{,}06$	$\cos 3{,}2 = -1$	$tg\ 3{,}2 = 0{,}06 \rightarrow$ Quadrant III
c) $\sin 2 = 0{,}91$	$\cos 2 = -0{,}42$	$tg\ 2 = -2{,}19 \rightarrow$ Quadrant II
d) $\sin 4{,}5 = -0{,}98$	$\cos 4{,}5 = -0{,}21$	$tg\ 4{,}5 = 4{,}64 \rightarrow$ Quadrant III
e) $\sin\frac{\pi}{8} = 0{,}38$	$\cos\frac{\pi}{8} = 0{,}92$	$tg\frac{\pi}{8} = 0{,}41 \rightarrow$ Quadrant I
f) $\sin\frac{7\pi}{4} = -0{,}71$	$\cos\frac{7\pi}{4} = 0{,}71$	$tg\frac{7\pi}{4} = -1 \rightarrow$ Quadrant IV
g) $\sin\frac{3\pi}{5} = 0{,}95$	$\cos\frac{3\pi}{5} = -0{,}31$	$tg\frac{3\pi}{5} = -3{,}08 \rightarrow$ Quadrant II
h) $\sin 1{,}2\pi = -0{,}59$	$\cos 1{,}2\pi = -0{,}81$	$tg\ 1{,}2\pi = 0{,}73 \rightarrow$ Quadrant III

31 **En cada cas troba, en radians, dos valors per a l'angle α tals que:**

a) $\sin\alpha = 0{,}32$

b) $\cos\alpha = 0{,}58$

c) $tg\ \alpha = -1{,}5$

d) $\sin\alpha = -0{,}63$

a) $\alpha_1 = 0{,}33$; $\alpha_2 = 2{,}82$

b) $\alpha_1 = 0{,}95$; $\alpha_2 = 5{,}33$

c) $\alpha_1 = -0{,}98$; $\alpha_2 = 2{,}16$

d) $\alpha_1 = -0{,}68$; $\alpha_2 = 3{,}82$

Pàgina 144

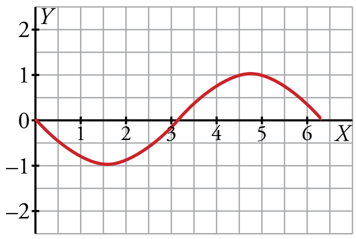
Per resoldre

32 Representa les funcions trigonomètriques següents:

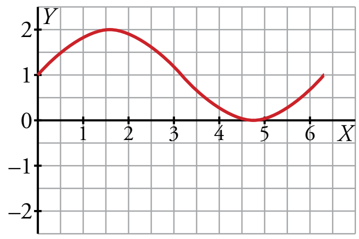
a) $y = -\sin x$ **b)** $y = 1 + \sin x$ **c)** $y = -\cos x$ **d)** $y = 1 + \cos x$

Totes aquestes funcions són periòdiques, de període 2π. Estan representades en l'interval $[0, 2\pi]$. A partir d'aquí, es repeteix.

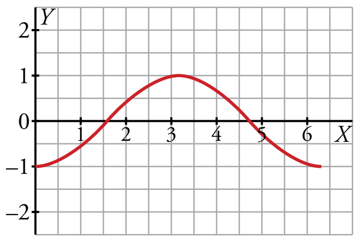
a) $y = -\sin x$



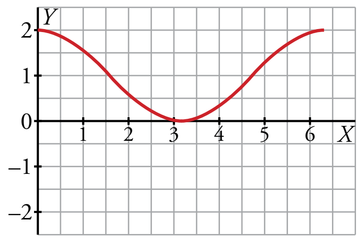
b) $y = 1 + \sin x$



c) $y = -\cos x$



d) $y = 1 + \cos x$



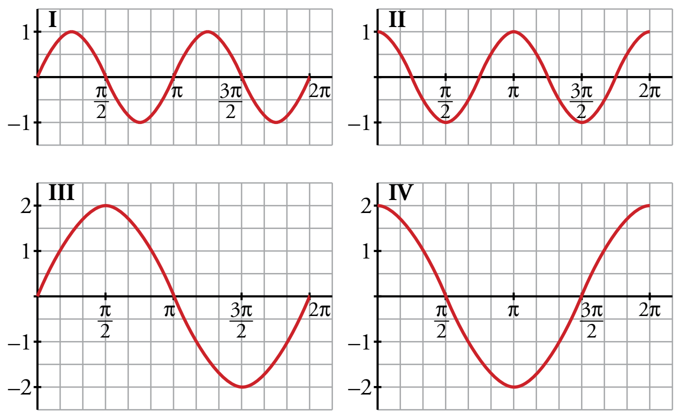
33 Associa cada una de les funcions següents amb la gràfica que li correspon:

a) $y = 2 \sin x$

b) $y = \cos 2x$

c) $y = 2 \cos x$

d) $y = \sin 2x$



a) Gràfica III. b) Gràfica II. c) Gràfica IV. d) Gràfica I.

34 Troba els punts de tall de les funcions $y = \sin x$ i $y = tg\, x$.

Els punts de tall seran aquells les abscisses dels quals compleixin $\sin x = tg\, x$.

Resolem l'equació:

$$\sin x - tg\, x = 0 \rightarrow \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \rightarrow \sin x\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 - \dfrac{1}{\cos x} = 0 \end{cases}$$

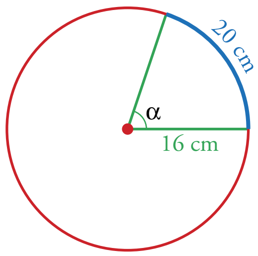
- Si $\sin x = 0 \rightarrow x = 0 + 2\pi \cdot k;\ x = \pi + 2\pi \cdot k$
- Si $1 - \dfrac{1}{\cos x} = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0 + 2\pi \cdot k$

En resum, $x = \pi \cdot k$

En tots aquests, tant el sinus com la tangent valen 0. Per tant, els punts de tall de les funcions són de la forma $(\pi \cdot k, 0)$.

35 **En una circumferència de 16 cm de radi, un arc mesura 20 cm. Troba l'angle central que correspon a aquest arc i expressa'l en graus i en radians.**

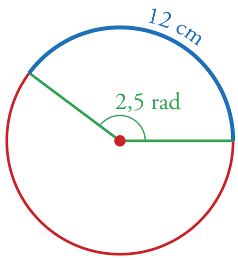
Com que la circumferència completa (100,53 cm) són 2π *rad*, aleshores:



$$\frac{100,53}{20} = \frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{20 \cdot 2\pi}{100,53} = 1,25\ rad$$

$$\alpha = \frac{360°}{2\pi} \cdot 1,25 = 71°\ 37'\ 11''$$

36 **En una circumferència determinada, a un arc de 12 cm de longitud li correspon un angle de 2,5 radians. Quin és el radi d'aquesta circumferència?**



$$\frac{2,5\ rad}{1\ rad} = \frac{12\ \text{cm}}{R\ \text{cm}} \rightarrow R = \frac{12}{2,5} = 4,8\ \text{cm}$$

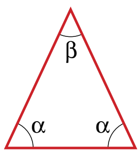
37 **Troba, en radians, l'angle comprès entre 0 i 2π tal que les seves raons trigonomètriques coincideixin amb les de $\frac{19\pi}{5}$.**

Com que $\frac{19}{5} = 3,8$, l'angle α donat verifica $2\pi < \alpha < 4\pi$, aleshores té més d'una volta completa i menys de dues voltes.

Si en restem una volta (2π), obtindrem l'angle que ens demanen.

Té les mateixes raons trigonomètriques que l'angle $\frac{19\pi}{5} - 2\pi = \frac{9\pi}{5}$ y $0 < \frac{9\pi}{5}\ \text{rad} < 2\pi$.

38



Si en aquest triangle isòsceles sabem que $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$, calcula, sense trobar l'angle α, el valor de $cos\ \beta$.

Per calcular $cos\ \beta$ necessitem esbrinar primer el valor de $sin\ \alpha$:

$$sin^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sin^2\ \alpha + \frac{1}{8} = 1 \rightarrow sin^2\ \alpha = \frac{7}{8} \rightarrow sin\ \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}} \text{ ja que és un angle agut.}$$

$$cos\ \beta = cos\ (180° - 2\alpha) = cos\ 180°\ cos\ 2\alpha + sin\ 180°\ sin\ 2\alpha = -cos\ 2\alpha = -(cos^2\ \alpha - sin^2 \alpha) = -\left(\frac{1}{8} - \frac{7}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

39 **En un triangle ABC coneixem $\hat{B} = 45°$ i $cos\ \hat{A} = -\frac{1}{5}$. Calcula, sense trobar els angles $\hat{A}$ i $\hat{C}$, les raons trigonomètriques de l'angle $\hat{C}$.**

Calculem primer les raons trigonomètriques de $\hat{A}$ i de $\hat{B}$.

$$sin^2\ \hat{A} + cos^2\ \hat{A} = 1 \rightarrow sin^2\ \hat{A} + \frac{1}{25} = 1 \rightarrow sin^2\ \hat{A} = \frac{24}{25} \rightarrow sin^2\ \hat{A} = \frac{\sqrt{24}}{5}\text{, ja que } \hat{A} < 180°.$$

$$sin\ \hat{B} = sin\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad cos\ \hat{B} = cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sin\ \hat{C} = sin\ (180° - (\hat{A} + \hat{B})) = sin\ 180°\ cos\ (\hat{A} + \hat{B}) - cos\ 180°\ sin\ (\hat{A} + \hat{B}) = sin\ (\hat{A} + \hat{B}) =$$

$$= sin\ \hat{A}\ cos\ \hat{B} + cos\ \hat{A}\ sin\ \hat{B} = \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}$$

$$\cos \widehat{C} = \cos (180° - (\widehat{A} + \widehat{B})) = \cos 180° \cos (\widehat{A} + \widehat{B}) + \sin 180° \sin (\widehat{A} + \widehat{B}) = -\cos (\widehat{A} + \widehat{B}) =$$

$$= -(\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} - \sin \widehat{A} \sin \widehat{B}) = -\left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10}$$

$$tg\, \widehat{C} = \frac{\sin \widehat{C}}{\cos \widehat{C}} = \frac{\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}}{\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{25 - 4\sqrt{6}}{23}$$

40 **Si $\cos 2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcula $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, sense trobar l'angle α.**

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 2 \sin^2 \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}}$$, ja que l'angle és en el quart quadrant.

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}$$, ja que l'angle és en el quart quadrant.

41 **Demostra aquestes igualtats:**

a) $\dfrac{tg\, \alpha}{tg\, 2\alpha - tg\, \alpha} = \cos 2\alpha$ **b)** $\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha\, (1 - 2 \sin^2 \alpha)$ **c)** $\cos 4\alpha + 2 \sin^2 2\alpha = 1$

a) $$\frac{tg\, \alpha}{tg\, 2\alpha - tg\, \alpha} = \frac{tg\, \alpha}{\frac{2\, tg\, \alpha}{1 - tg^2 \alpha} - tg\, \alpha} = \frac{tg\, \alpha\, (1 - tg^2 \alpha)}{2\, tg\, \alpha - tg\, \alpha\, (1 - tg^2 \alpha)} = \frac{tg\, \alpha\, (1 - tg^2 \alpha)}{tg\, \alpha + tg^3 \alpha} =$$

$$= \frac{tg\, \alpha\, (1 - tg^2 \alpha)}{tg\, \alpha\, (1 + tg^2 \alpha)} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

b) $$\sin 4\alpha = \sin (2 \cdot 2\alpha) = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \sin 2\alpha\, (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$$

$$= 2 \sin 2\alpha\, (1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2 \sin 2\alpha\, (1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

c) $$\cos 4\alpha + 2 \sin^2 2\alpha = \cos (2 \cdot 2\alpha) + 2 \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 2 \sin^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1$$

42 **Simplifica:**

a) $\dfrac{2 \cos (45° + \alpha) \cos (45° - \alpha)}{\cos 2\alpha}$ **b)** $\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha$

a) $$\frac{2 \cos (45° + \alpha) \cos (45° - \alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{2 (\cos 45° \cos \alpha - \sin 45° \sin \alpha)(\cos 45° \cos \alpha + \sin 45° \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 (\cos^2 45° \cos^2 \alpha - \sin^2 45° \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \cdot [(\sqrt{2}/2)^2 \cos^2 \alpha - (\sqrt{2}/2)^2 \sin^2 \alpha]}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1/2 \cos^2 \alpha - 2 \cdot 1/2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 1$$

b) $$\sin \alpha \cdot \cos (2\alpha) - \cos \alpha \cdot \sin (2\alpha) = \sin \alpha\, (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \cos \alpha\, 2 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha - 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = -\sin^3 \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= -\sin \alpha\, (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -\sin \alpha$$

43 **Resol aquestes equacions:**

a) $\dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

b) $\dfrac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

c) $\sin 3x - \sin x = \cos 2x$

d) $\sin 3x - \cos 3x = \sin x - \cos x$

a) $$\frac{2\sin\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}}{2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}} = 1 \rightarrow \frac{2\sin 4x\cos x}{2\cos 2x\cos x} = 1 \rightarrow \frac{\sin 4x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow \frac{\sin(2\cdot 2x)}{\cos 2x} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2\sin 2x\cos 2x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow 2\sin 2x = 1 \rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} 2x = 30° \rightarrow x_1 = 15° + k\cdot 360° = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 150° \rightarrow x_2 = 75° + k\cdot 360° = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 390° \rightarrow x_3 = 195° + k\cdot 360° = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 510° \rightarrow x_4 = 255° + k\cdot 360° = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

En comprovar-ho, veiem que totes les solucions són vàlides.

b) $$\frac{2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}}{-2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{2\sin 2x\cos x}{-2\sin 2x\sin x} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\frac{1}{tg\, x} = \sqrt{3} \rightarrow tg\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 150° \\ x_2 = 330° \end{cases}$$

Ambdues solucions són vàlides; per tant:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 150° + k\cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = 330° + k\cdot 360° = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

c) $2\cos\dfrac{3x+x}{2}\sin\dfrac{3x-x}{2} = \cos 2x$

$2\cos 2x\sin x = \cos 2x \rightarrow 2\sin x = 1 \rightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x_1 = 30°,\ x_2 = 150°$

Comprovant, veiem que les dues solucions són vàlides. Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 30° + k\cdot 360° = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = 150° + k\cdot 360° = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right\} \text{amb } k \in \mathbb{Z}$$

d) $\sin 3x - \sin x = \cos 3x - \cos x \rightarrow 2\cos 2x\sin x = -2\sin 2x\sin x \rightarrow$ (Dividim entre $2\sin x$)

$$\rightarrow \cos 2x = -\sin 2x \rightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -1 \rightarrow tg\, 2x = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{cases} 2x = 315° \rightarrow x_1 = 157{,}5° + k\cdot 360° \\ 2x = 135° \rightarrow x_2 = 67{,}5° + k\cdot 360° \\ 2x = 675° \rightarrow x_3 = 337{,}5° + k\cdot 360° \\ 2x = 495° \rightarrow x_4 = 247{,}5° + k\cdot 360° \end{cases}\right\} \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Podem comprovar que les quatre solucions són vàlides. Agrupant-les:

$x = 67{,}5° + k\cdot 90°$ amb $k \in \mathbb{Z}$

44 **a) Demostra que** $\boldsymbol{\sin 3x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x}$. **b) Resol l'equació** $\boldsymbol{\sin 3x - 2\sin x = 0}$.

a) $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x = 2\sin x\cos x\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x =$

$$= 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^2 x - \sin^3 x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$$

b) $\sin 3x - 2\sin x = 0 \rightarrow$ pel resultat de l'apartat anterior:

$$3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x - 2\sin x = 0 \rightarrow 3\sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x - 2\sin x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x - 2\sin x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4\sin^3 x - \sin x = 0 \rightarrow \sin x(4\sin^2 x - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x_1 = 0°,\ x_2 = 150° \\ \sin x = \pm\dfrac{1}{2} \rightarrow x_3 = 30°,\ x_4 = 150°,\ x_5 = 210°,\ x_6 = 330° \end{cases}$$

Totes les solucions són vàlides i es poden expressar com a:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k\cdot 180° = k\pi \\ x_2 &= 30° + k\cdot 180° = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x_3 &= 150° + k\cdot 180° = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{aligned}\right\} \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

45 **Demostra les igualtats següents:**

a) $\boldsymbol{\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\alpha\cdot\sin\beta}$ **b)** $\boldsymbol{\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sin\alpha\cdot\sin\beta}$

a) El primer membre de la igualtat és una diferència de quadrats; per tant, podem factoritzar-lo com una suma per una diferència:

$$\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]\cdot\left[\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] \overset{(*)}{=} \left[2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right]\cdot\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{(1-\cos\beta)(1+\cos\beta)(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)} =$$

$$= \sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)} = \sqrt{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta} = \sin\alpha\sin\beta$$

(∗) Transformem la suma i la diferència en productes, tenint en compte que:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta$$

b) Procedim de manera anàloga a l'apartat anterior, però ara:

$$\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} = -\beta$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] =$$

$$= \left[2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{-\beta}{2}\right]\cdot\left[-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{-\beta}{2}\right] = \left[2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right]\cdot\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right] =$$

$$= 4\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)} = \sqrt{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta} = \sin\alpha\sin\beta$$

NOTA: També podríem haver-ho resolt aplicant l'apartat anterior com segueix:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 1 + \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \overset{(*)}{=} \sin\alpha\sin\beta$$

(∗) Per l'apartat anterior.

46 **Resol els sistemes següents donant les solucions corresponents al primer quadrant:**

a) $\begin{cases} x+y=120° \\ \sin x-\sin y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \sin x+\cos y=1 \\ x+y=90° \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 y=1 \\ \cos^2 x-\sin^2 y=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \sin x+\cos y=1 \\ 4\sin x\cos y=1 \end{cases}$

a) De la segona equació: $2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2}$

Com que:

$$x+y=120° \rightarrow 2\cos 60°\sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2} \rightarrow 2\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{x-y}{2}=30° \rightarrow x-y=60°$$

Així: $x+y=120°$

$x-y=60°$

$2x = 180° \rightarrow x=90° \rightarrow y=30°$

Aleshores la solució és (90°, 30°)

b) $x+y=90° \rightarrow$ complementaris $\rightarrow \sin x=\cos y$

Substituint en la primera equació del sistema:

$$\cos y+\cos y=1 \rightarrow 2\cos y=1 \rightarrow \cos y=\frac{1}{2} \rightarrow y=60° \rightarrow x=90°-y=90°-60°=30°$$

Aleshores la solució és: (30°, 60°)

c) Com que $\begin{cases} \cos^2 y=1-\sin^2 y \\ \cos^2 x=1-\sin^2 x \end{cases}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} \sin^2 x+1-\sin^2 y=1 \\ 1-\sin^2 x-\sin^2 y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \sin^2 x-\sin^2 y=0 \\ -\sin^2 x-\sin^2 y=0 \end{array}\right\}$$

$$-2\sin^2 y=0 \rightarrow \sin y=0 \rightarrow y=0°$$

Substituint en la segona equació (per exemple) del sistema inicial, s'obté:

$$\cos^2 x-0=1 \rightarrow \cos^2 x=1=\begin{cases} \cos x=1 \rightarrow x=0° \\ \cos x=-1 \rightarrow x=180° \in \text{2n quadrant} \end{cases}$$

Aleshores la solució és: (0°, 0°)

d) $\left.\begin{array}{l} \sin x+\cos y=1 \\ 4\sin x\cos y=1 \end{array}\right\} \cos y=1-\sin x$

$$4\sin x(1-\sin x)=1 \rightarrow 4\sin^2 x-4\sin x+1=0 \rightarrow \sin x=\frac{4\pm 0}{8}=\frac{1}{2} \rightarrow \cos y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Les diferents possibilitats són:

$\begin{cases} x=30°+360°\cdot k \\ y=60°+360°\cdot k \end{cases}$

$\begin{cases} x=30°+360°\cdot k \\ y=300°+360°\cdot k \end{cases}$

$\begin{cases} x=150°+360°\cdot k \\ y=60°+360°\cdot k \end{cases}$

$\begin{cases} x=150°+360°\cdot k \\ y=300°+360°\cdot k \end{cases}$

47 **Sense desenvolupar les raons trigonomètriques de la suma o de la diferència d'angles, esbrina per a quins valors de x es verifica cada una d'aquestes igualtats:**

a) $\sin(x-60°)=\sin 2x$ **b)** $\cos(x-45°)=\cos(2x+60°)$

c) $\sin(x+60°)=\cos(x+45°)$ **d)** $\cos(2x-30°)=\cos(x+45°)$

a) $\sin(x-60°)=\sin 2x \rightarrow \sin 2x-\sin(x-60°)=0 \rightarrow$

$$\rightarrow 2\cos\frac{2x+x-60°}{2}\sin\frac{2x-(x-60°)}{2}=0 \rightarrow \cos\frac{3x-60°}{2}\sin\frac{x+60°}{2}=0$$

• Si $\cos\frac{3x-60°}{2}=0 \rightarrow \begin{cases}\frac{3x-60°}{2}=90° \rightarrow x=80°+360°\cdot k\\ \frac{3x-60°}{2}=270° \rightarrow x=200°+360°\cdot k\end{cases}$

Si sumem 360°, trobem una altra solució:

$$\frac{3x-60°}{2}=90°+360° \rightarrow x=320°+360°\cdot k$$

• Si $\sin\frac{x+60°}{2}=0 \rightarrow \begin{cases}\frac{x+60}{2}=0° \rightarrow x=300°+360°\cdot k\\ \frac{x+60°}{2}=180° \rightarrow x=300°+360°\cdot k\end{cases}$

b) $\cos(x-45°)=\cos(2x+60°) \rightarrow \cos(2x+60°)-\cos(x-45°)=\ 0 \rightarrow$

$$\rightarrow -2\sin\frac{2x+60°+x-45°}{2}\sin\frac{2x+60°-(x-45°)}{2}=0 \rightarrow \sin\frac{3x+15°}{2}\sin\frac{x+105°}{2}=0$$

• Si $\sin\frac{3x+15°}{2}=0 \rightarrow \begin{cases}\frac{3x+15°}{2}=0° \rightarrow x=355°+360°\cdot k\\ \frac{3x+15°}{2}=180° \rightarrow x=115°+360°\cdot k\end{cases}$

Si sumem 360°, trobem una altra solució: $\frac{3x+15°}{2}=0°+360° \rightarrow x=235°+360°\cdot k$

• Si $\sin\frac{x+105°}{2}=0 \rightarrow \begin{cases}\frac{x+105°}{2}=0° \rightarrow x=255°+360°\cdot k\\ \frac{x+105°}{2}=180° \rightarrow x=255°+360°\cdot k\end{cases}$

c) $\sin(x+60°)=\cos(x+45°)$

Com que $\cos x=\sin(x+90°)$, podem substituir en el segon membre obtenint:

$\sin(x+60°)=\sin(x+45°+90°) \rightarrow \sin(x+60°)=\sin(x+135°) \rightarrow \sin(x+135°)-\sin(x+60°)=0$

$$-2\cos\frac{x+135°+x+60°}{2}\sin\frac{x+135°-(x+60°)}{2}=0 \rightarrow \cos\frac{2x+195°}{2}\sin\frac{75°}{2}=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases}\frac{2x+195°}{2}=90° \rightarrow x=352°\,30'+360°\cdot k\\ \frac{2x+195°}{2}=270° \rightarrow x=172°\,30'+360°\cdot k\end{cases}$$

d) $\cos(2x-30°)=\cos(x+45°) \rightarrow \cos(2x-30°)-\cos(x+45°)=0 \rightarrow$

$$\rightarrow -2\sin\frac{2x-30°+x+45°}{2}\sin\frac{2x-30°-(x+45°)}{2}=0 \rightarrow \sin\frac{3x+15°}{2}\sin\frac{x-75°}{2}=0$$

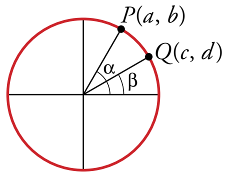
• Si $\sin\frac{3x+15°}{2}=0 \rightarrow \begin{cases}\frac{3x+15°}{2}=0° \rightarrow x=355°+360°\cdot k\\ \frac{3x+15°}{2}=180° \rightarrow x=115°+360°\cdot k\end{cases}$

Si sumem 360°, trobem una altra solució: $\frac{3x+15°}{2}=0+360° \rightarrow x=235°+360°\cdot k$

• Si $\sin\frac{x-75°}{2}=0 \rightarrow \begin{cases}\frac{x-75°}{2}=0° \rightarrow x=75°+360°\cdot k\\ \frac{x-75°}{2}=180° \rightarrow x=75°+360°\cdot k\end{cases}$

48 **En una circumferència goniomètrica dibuixem els angles α i β. Anomenem $\gamma = \alpha - \beta$.**

a) Quina d'aquestes expressions és igual a *sin* γ?



I. $ac + bd$ II. $bc - ad$ III. $ad - bc$ IV. $ab + cd$

b) Alguna d'aquestes és igual a *cos* γ?

a) $\sin \gamma = \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = ad - bc$ (III)

b) $\cos \gamma = \cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = bd + ac$ (I)

Pàgina 145

Qüestions teòriques

49 **Quina de les condiciones següents han de complir x i y perquè es verifiqui $\cos (x + y) = 2 \cos x \cos y$?**

(I) $x = y$ (II) $x - y = \pi$ (III) $x + y = \pi$ (IV) $x - y = \frac{\pi}{2}$

$\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Si $\cos (x + y) = 2 \cos x \cos y \rightarrow \cos x \cos y - \sin x \sin y = 2 \cos x \cos y \rightarrow -\sin x \sin y = \cos x \cos y$

Dividint entre $\cos x \cos y$, s'obté que $\frac{-\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 1$, és a dir, $-tg\, x\, tg\, y = 1$ i això passa només quan es compleix (IV) perquè, aïllant y, tenim: $y = x + \frac{\pi}{2}$, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} \sin y = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \\ \cos y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \end{array}\right\} \rightarrow tg\, y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = -\frac{1}{tg\, x}$$

50 **Expressa *sin* 4α i *cos* 4α en funció de *sin* α i *cos* α.**

$\sin 4\alpha = \sin (2 \cdot 2\alpha) = 2 \sin 2\alpha \cos \alpha = 2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha$

$\cos 4\alpha = \cos (2 \cdot 2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 2\alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 - (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 =$

$= \cos^4 \alpha - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$

51 **En duplicar-se un angle, se'n duplica el sinus? Prova si es compleix $\sin 2x = 2 \sin x$ per a qualsevol valor de x.**

L'afirmació és falsa perquè, per exemple, $\sin 60° = \sqrt{3} \sin 30° \neq 2 \sin 30°$.

Vegem ara si existeix algun angle que compleixi la relació $\sin 2x = 2 \sin x$.

$2 \sin x \cos x = 2 \sin x = \sin x \cos x - \sin x = 0 \rightarrow \sin x (\cos x - 1) = 0$

- Si $\sin x = 0 \rightarrow x = 0° + 360° \cdot k$, $x = 180° + 360° \cdot k$
- Si $\cos x = 1 \rightarrow x = 0° + 360° \cdot k$ (solució obtinguda anteriorment)

Per tant, els únics angles que compleixen la relació donada són de la forma $180° \cdot k$.

52 **Justifica que en un triangle ABC, rectangle en A, es verifica la igualtat següent:**

$\sin 2B = \sin 2C$

Com que el triangle és rectangle en $\hat{A}$, tenim que $\hat{B} = 90° - \hat{C}$ i, per tant,

$\sin \hat{B} = \sin (90° - \hat{C}) = \cos \hat{C}$ i $\cos \hat{B} = \cos (90° - \hat{C}) = \sin \hat{C}$

Aleshores, $\sin 2\hat{B} = 2 \sin \hat{B} \cos \hat{B} = 2 \cos \hat{C} \sin \hat{C} = \sin 2\hat{C}$

53 **Per a quins valors de α i β es verifica la igualtat $\sin (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$?**

Com que $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, $\sin (\alpha + \beta) = 2\sin \alpha \cos \beta \rightarrow$

$\rightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = 2 \sin \alpha \cos \beta \rightarrow \cos \alpha \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta$

Aquesta relació és certa, òbviament si $\alpha = \beta$.

Per altra banda, dividint entre $cos\,\alpha\, cos\,\beta$, tenim que $\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{sin\,\beta}{cos\,\alpha}$; aleshores els angles α i β han de tenir la mateixa tangent.

Això passa quan $\beta = \alpha + 180° \cdot k$ per la periodicitat de la funció $y = tg\,x$.

Si $cos\,\alpha = 0$, aleshores $0 = sin\,\alpha\, cos\,\beta \rightarrow cos\,\beta = 0$, ja que $sin\,\alpha = \pm 1$.

Per tant, la relació també és certa si α i β són simultàniament de la forma $90° + 360° \cdot k$ o $270° + 360° \cdot k$.

En resum, es verifica la igualtat quan $\beta = \alpha + 180° \cdot k$.

54 **Quina relació hi ha entre les gràfiques de cada una de les funcions següents i les de $y = sin\,x$ i $y = cos\,x$?**

a) $y = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $y = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $y = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **d)** $y = sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

La relació que existeix és que la gràfica de la funció $y = cos\,x$ està desplaçada horitzontalment cap a l'esquerra $\frac{\pi}{2}$ unitats respecte de $sin\,x$.

a) Coincideix amb la gràfica de la funció $y = cos\,x$.

b) És la gràfica de la funció $y = -sin\,x$.

c) Coincideix amb la gràfica de la funció $y = sin\,x$.

d) Coincideix amb la gràfica de la funció $y = cos\,x$.

(A més de comprovar-se mitjançant la representació gràfica, pot provar-se fàcilment usant les fórmules de les raons trigonomètriques de la suma o diferència d'angles).

55 **En quins punts de l'interval [0, 4π] talla l'eix X cada una de les funcions següents?**

a) $y = cos\,\frac{x}{2}$ **b)** $y = sin\,(x - \pi)$ **c)** $y = cos\,(x + \pi)$

Els punts de tall amb l'eix X són aquells per als quals $y = 0$.

a) $$cos\,\frac{x}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = 3\pi \end{cases}$$

b) $$sin\,(x - \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - \pi = -\pi \rightarrow x = 0 \\ x - \pi = 0 \rightarrow x = \pi \\ x - \pi = \pi \rightarrow x = 2\pi \\ x - \pi = 2\pi \rightarrow x = 3\pi \\ x - \pi = 3\pi \rightarrow x = 4\pi \end{cases}$$

c) $$y = cos\,(x + \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + \pi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{5\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{7\pi}{2} \rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{9\pi}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

Per aprofundir

56 **Demostra que si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, es verifica: $tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\gamma$**

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,(360° - (\alpha + \beta)) = tg\,\alpha + tg\,\beta + \frac{tg\,360° - tg\,(\alpha + \beta)}{1 + tg\,360° \cdot tg\,(\alpha + \beta)} =$$

$$= tg\,\alpha + tg\,\beta - tg\,(\alpha + \beta) = tg\,\alpha + tg\,\beta - \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta - tg^2\,\alpha\, tg\,\beta - tg\,\alpha\, tg^2\,\beta - tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} =$$

$$= \frac{-tg^2\,\alpha\, tg\,\beta - tg\,\alpha\, tg^2\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} = tg\,\alpha\, tg\,\beta\, \frac{-tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta} = tg\,\alpha\, tg\,\beta\,[-tg\,(\alpha + \beta)] =$$

$$= tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,(360° - (\alpha + \beta)) = tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,\gamma$$

57 **Prova si hi ha cap triangle isòsceles en el qual el cosinus de l'angle diferent sigui igual a la suma dels cosinus dels angles iguals.**

Si anomenem x cada un dels angles iguals, aleshores l'angle desigual és $180° - 2x$.

Es tracta de veure si la següent equació té solució: $\cos(180° - 2x) = 2\cos x$

Vegem-ho:

$$\cos 180° \cos 2x + \sin 180° \sin 2x = 2\cos x \to -\cos 2x = 2\cos x \to -\cos^2 x + \sin^2 x = 2\cos x \to$$

$$\to -\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 2\cos x \to 2\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0 \to$$

$$\to \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Si $\cos x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \to x = 68° 31' 45''$ té cada un dels angles iguals i l'angle desigual té $180° - 2 \cdot 68° 31' 45'' = 42° 56' 30''$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} > 1$ que no és possible perquè el cosinus d'un angle no pot ser més gran que 1.

Per tant, no existeix cap triangle amb aquestes condicions.

58 **Resol els sistemes següents i dóna'n les solucions en l'interval $[0, 2\pi)$:**

a) $\begin{cases} \cos x + \cos y = -1/2 \\ \cos x \cos y = -1/2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = \pi/2 \\ \sqrt{3}\cos x - \cos y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3}/2 \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 3/4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 1/4 \\ \cos x \cdot \sin y = 1/4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \cos x + \cos y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ $\cos y = -\frac{1}{2} - \cos x$

$\cos x\left(-\frac{1}{2} - \cos x\right) = -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}\cos x - \cos^2 x = -\frac{1}{2} \to \cos x + 2\cos^2 x = 1$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \to \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{-1-3}{4} = -1 \\ \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Si $\cos x = -1 \to x = \pi$

  $\cos y = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} y = \pi/3 \\ y = 5\pi/3 \end{cases}$

- Si $\cos x = \frac{1}{2}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$ $\to \cos y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \to y = \pi$

Solucions: $\left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \pi\right)$

b) $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\sqrt{3}\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \to \sqrt{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\cos x - \sin\frac{\pi}{2}\sin x = 1 \to \sqrt{3}\cos x = \sin x + 1$$

Elevem al quadrat:

$$3\cos^2 x = \sin^2 x + 2\sin x + 1 \to 3(1 - \sin^2 x) = \sin^2 x + 2\sin x + 1 \to 4\sin^2 x + 2\sin x - 2 = 0 \to$$

$$\to 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \to \sin x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

- Si $\sin x = \frac{1}{2} \to x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$

  $x = \frac{\pi}{6} \to y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ y $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ val.

  $x = \frac{5\pi}{6} \to y = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$ no pot ser perquè no està en l'interval donat.

- Si $\sin x = -1 \to x = \frac{3\pi}{2} \to y = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$ tampoc no és possible pel mateix motiu.

c) Elevem al quadrat la primera equació:

$sin^2 x + 2\, sin\, x\, sin\, y + sin^2 y = \frac{3}{4} \rightarrow 2\, sin\, x\, sin\, y + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow sin\, x\, sin\, y = 0$

Si $sin\, x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pi$

A més, $sin\, y = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{3},\ y = \frac{2\pi}{3}$

Substituïm en el sistema per comprovar-les perquè poden aparèixer solucions falses en elevar al quadrat.

$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right)$ Valen.

Si $sin\, y = 0 \rightarrow y = 0,\ y = \pi$

A més, $sin\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{2\pi}{3}$

Substituïm en el sistema per comprovar-les perquè poden aparèixer solucions falses en elevar al quadrat.

$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ Valen.

d) Elevem al quadrat la primera equació i substituïm en la segona:

$$sin^2 x\, cos^2 y = \frac{1}{16} \rightarrow cos^2 y = \frac{1}{16\, sin^2 x}$$

$$cos^2 x\, sin^2 y = \frac{1}{16} \rightarrow cos^2 x\,(1 - cos^2 y) = \frac{1}{16} \rightarrow cos^2 x\left(1 - \frac{1}{16\, sin^2 x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow (1 - sin^2 x)\left(1 - \frac{1}{16\, sin^2 x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow 1 - \frac{1}{16\, sin^2 x} - sin^2 x + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{16\, sin^2 x} - sin^2 x = 0 \rightarrow 16\, sin^2 x - 1 - 16\, sin^4 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16\, sin^4 x - 16\, sin^2 x + 1 = 0 \rightarrow sin^2 x = \frac{16 + \sqrt{192}}{32} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}$$

- Si $sin\, x = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \rightarrow cos\, y = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

  $x = 75°,\ x = 105°,\ y = 75°,\ y = 285°$

  Ara comprovem les solucions perquè, en elevar al quadrat, poden aparèixer resultats falsos:

  (75°, 75°) → Val.

  (75°, 285°) → No val, ja que no compleix la segona equació.

  (105°, 75°) → No val, ja que no compleix la segona equació.

  (105°, 285°) → Val.

- Si $sin\, x = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \rightarrow cos\, y = -\frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

  $x = 285°,\ x = 255°,\ y = 105°,\ y = 255°$

  Ara comprovem les solucions perquè, en elevar al quadrat, poden aparèixer resultats falsos:

  (285°, 105°) → Val.

  (285°, 255°) → No val, ja que no compleix la segona equació.

  (255°, 105°) → No val, ja que no compleix la segona equació.

  (255°, 255°) → Val.

59 **Demostra que:**

a) $\sin x = \dfrac{2\,tg\,(x/2)}{1 + tg^2\,(x/2)}$ b) $\cos x = \dfrac{1 - tg^2\,(x/2)}{1 + tg^2\,(x/2)}$ c) $tg\,x = \dfrac{2\,tg\,(x/2)}{1 - tg^2\,(x/2)}$

a) Desenvolupem i operem en el segon membre de la igualtat:

$$\frac{2\,tg\,\frac{x}{2}}{1 + tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}{1 + \frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}{\frac{1+\cos x+1-\cos x}{1+\cos x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}{\frac{2}{1+\cos x}} = (1+\cos x)\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} =$$

$$= \sqrt{(1+\cos x)^2\,\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{(1+\cos x)\,(1-\cos x)} = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = \sin x$$

b) $$\frac{1 - tg^2\,\frac{x}{2}}{1 + tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{1-\cos x}{1+\cos x}}{1 + \frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\frac{1+\cos x-1+\cos x}{1+\cos x}}{\frac{1+\cos x+1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{2\cos x}{2} = \cos x$$

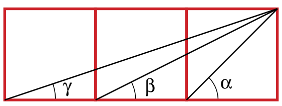
c) $$\frac{2\,tg\,\frac{x}{2}}{1 - tg^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}{1 - \frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}{\frac{1+\cos x-1+\cos x}{1+\cos x}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}{\frac{2\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1+\cos x}{\cos x}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} =$$

$$= \frac{1}{\cos x}\cdot\sqrt{(1+\cos x)^2\,\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1}{\cos x}\cdot\sqrt{(1+\cos x)\,(1-\cos x)} =$$

$$= \frac{1}{\cos x}\sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\sqrt{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x = tg\,x$$

60 **Demostra que, en la figura següent, $\alpha = \beta + \gamma$:**



Suposem que els quadrats tenen costat l.

Per una part,

$$tg\,\alpha = \frac{l}{l} = 1$$

Per un altre costat,

$$tg\,(\beta+\gamma) = \frac{tg\,\beta + tg\,\gamma}{1 - tg\,\beta\,tg\,\gamma} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l}\cdot\frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}} = 1$$

Així, α i $\beta + \gamma$ són dos angles compresos entre 0° i 90° les tangent dels quals coincideixen. Per tant, els angles han de ser iguals; és a dir, $\alpha = \beta + \gamma$.

Autoavaluació

Pàgina 145

1 **Si $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ i $\alpha < \pi$, troba:**

a) $\sin\alpha$ **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$ **c)** $tg\,\frac{\alpha}{2}$ **d)** $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \sin^2\alpha + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow \sin^2\alpha = \frac{15}{16} \rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, ja que l'angle és en el 2n quadrant.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$

c) $tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ perquè $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$

2 **Demostra cada una d'aquestes igualtats:**

a) $tg\,2\alpha = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\,\alpha}$

b) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

a) $tg\,2\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \dfrac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

b) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) =$

$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta =$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

3 **Resol:**

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 1$ **b)** $2\,tg\,x\cos^2\frac{x}{2} - \sin x = 1$

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 1$

$\cos^2 x - \sin^2 x - (-\sin x) = 1 \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2\sin^2 x + \sin x = 0 \rightarrow \sin x(-2\sin x + 1) = 0$

- $\sin x = 0 \rightarrow x = 0°,\ x = 180°$
- $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30°,\ x = 150°$

Solucions:

$x_1 = 360°\cdot k;\ x_2 = 180° + 360°\cdot k;\ x_3 = 30° + 360°\cdot k;\ x_4 = 150° + 360°\cdot k$, amb $k \in \mathbb{Z}$

b) $2tg\,x\cos^2\frac{x}{2} - \sin x = 1 \rightarrow 2tg\,x\,\frac{1+\cos x}{2} - \sin x = 1 \rightarrow tg\,x + tg\,x\cos x - \sin x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow tg\,x + \frac{\sin x}{\cos x}\cos x - \sin x = 1 \rightarrow tg\,x = 1$

- $x_1 = 45° + 360°\cdot k$
- $x_2 = 225° + 360°\cdot k$

amb $k \in \mathbb{Z}$

4 **Simplifica:**

a) $\dfrac{\sin 60° + \sin 30°}{\cos 60° + \cos 30°}$ b) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(1 + tg^2 \dfrac{\alpha}{2}\right)$

a) $\dfrac{\sin 60° + \sin 30°}{\cos 60° + \cos 30°} = \dfrac{2 \sin \dfrac{60° + 30°}{2} \cos \dfrac{60° - 30°}{2}}{2 \cos \dfrac{60° + 30°}{2} \cos \dfrac{60° - 30°}{2}} = \dfrac{\sin 45°}{\cos 45°} = tg\ 45° = 1$

b) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(1 - tg^2 \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(1 + \dfrac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) = \dfrac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(\dfrac{2}{1 + \cos \alpha}\right) = \dfrac{2 \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \dfrac{2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = 2$

5 **Expressa en graus: $\dfrac{3\pi}{4}$ rad, $\dfrac{5\pi}{2}$ rad, 2 rad.**

$\dfrac{3\pi}{4}$ rad = 135° $\dfrac{5\pi}{2}$ rad = 450° 2 rad = 114° 35' 30''

6 **Expressa en radians donant el resultat en funció de π i com a nombre decimal.**

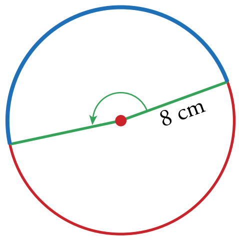
a) 60° **b) 225°** **c) 330°**

a) $60° = \dfrac{\pi}{3}$ rad = 1,05 rad

b) $225° = \dfrac{5\pi}{4}$ rad = 3,93 rad

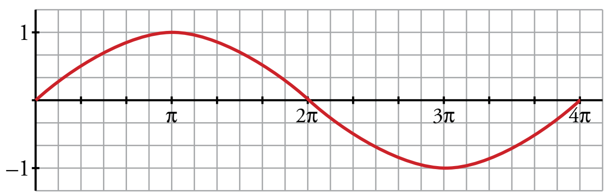
c) $330° = \dfrac{11\pi}{6}$ rad = 5,76 rad

7 **En una circumferència de 16 cm de diàmetre dibuixem un angle de 3 rad. Quina longitud tindrà l'arc corresponent?**



$l = 8 \cdot 3 = 24$ cm

8 **Associa aquesta gràfica amb una de les expressions següents i digues quin és el període:**



a) $y = \dfrac{\sin x}{2}$ **b)** $y = \sin 2x$ **c)** $y = \sin \dfrac{x}{2}$

La funció representada és de període 4π i es correspon amb la de l'apartat c).

Podem comprovar-ho estudiant alguns puntos. Per exemple:

$x = \pi \rightarrow y = \sin \dfrac{\pi}{2} = 1$

$x = 2\pi \rightarrow y = \sin \dfrac{2\pi}{2} = \sin \pi = 0$

$x = 3\pi \rightarrow y = \sin \dfrac{3\pi}{2} = -1$

$x = 4\pi \rightarrow y = \sin \dfrac{4\pi}{2} = \sin 2\pi = 0$